Über

Körper von kinetischer Symmetrie.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Facultät (II. Sektion)

der

Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt im Mai 1899

von

Robert Mayr.

München 1900.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Über

Körper von kinetischer Symmetrie.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Facultät (II. Sektion)

der

Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt im Mai 1899

von

Robert Mayr.

ACAD.
LUDWIG MAX.
BIBL.

München 1900.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548318_0073

I.

Einführung.

Mit dem Problem, homogene Körper zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, für alle durch den Schwerpunkt laufenden Axen gleiche Trägheitsmomente zu besitzen, haben sich gegen Ende des vorigen Jahrhunderts Laplace und Legendre[1]) beschäftigt. Seitdem scheint die Sache verschollen zu sein. Es dürfte aber sowohl vom mathematischen als auch vom historischen Standpunkt aus Interesse bieten, die von den französischen Mathematikern gefundenen, aber nicht weiter untersuchten Resultate aufzugreifen und einer Untersuchung zu unterziehen. Dieses Hauptziel verfolgt die vorliegende Abhandlung.

Körper der eben definierten Art nennt man „Körper von kinetischer Symmetrie“.[2])

Einfache Körper von kinetischer Symmetrie sind leicht anzugeben. Jeder Körper, welcher in Bezug auf drei zu einander lotrechte Axen in vollkommen gleicher Weise symmetrisch gebaut ist, muss, wenn er aus homogener Masse besteht, ein Körper von kinetischer Symmetrie sein. Solche Körper sind z. B. die Kugel, der Würfel, das reguläre Oktaëder u. s. w. Andere Körper der verlangten Art lassen sich durch Kombination einfacher Formen leicht gewinnen. Man kann z. B. auf jede Seitenfläche eines

---

[1]) Laplace: „Mémoire sur la figure de la terre“ in den Mém. d. Pariser Akad. für 1783, p. 17—46.

Legendre: „Suite des recherches sur la figure des planètes par M. Le Gendre“ in den Mém. der Par. Akad. für 1789 (publ. 1793), p. 372—455.

[2]) S. Theoret. Physik von Thomson und Tait, I. 1. Nr. 285.

Würfels einen bestimmten zu der senkrecht durch die Mitte der Seitenfläche laufenden Axe symmetrischen Körper (Pyramide, Kugelsegment, Cylinder, Kegel) aufsetzen. Die Symmetrie des Würfels wird, da auf jede Seitenfläche derselbe selbst symmetrische Körper in derselben Weise aufgesetzt wird, dadurch nicht verändert, und der neue Körper besitzt daher immer noch kinetische Symmetrie. Man kann ferner aus dem Inneren eines Körpers von kinetischer Symmetrie einen ebensolchen, konzentrisch gelegenen Körper herausschneiden, ohne die Gleichheit der Trägheitsmomente zu zerstören.

Man sieht also, dass man leicht eine ganze Menge von Körpern von kinetischer Symmetrie auffinden kann. Aber die angegebene Methode ist noch sehr speziell durch die Annahme gleicher Symmetrie für drei Axen und durch das Fehlen eines allgemeinen Bildungsgesetzes. Nun haben Laplace und Legendre das Problem in allgemeiner Weise angegriffen und eine Gleichung für die Oberfläche homogener Körper von kinetischer Symmetrie aufgestellt, welche eine unendliche Reihe solcher Körper erschliesst. Beide Mathematiker behandeln das Problem prinzipiell in derselben Weise mit Hilfe der von ihnen entwickelten Theorie der Kugelfunktionen. Legendre, welcher das Problem direkt als Anwendung seiner Kugelfunktionen bringt, behandelt es ausführlicher und auch allgemeiner als Laplace, indem er sich auf nicht homogene Körper verbreitet, während Laplace sich auf homogene Körper beschränkt.

Es möge der Gang der Ableitung, wie sie Laplace und Legendre bringen, für homogene Körper kurz dargelegt werden.

Unsere rechtwinklichen Koordinatenaxen x y z seien die durch den Anfangspunkt der Koordinaten laufenden Trägheitsaxen des Körpers. Die Koordinaten selbst seien nicht mit x y z, sondern mit $\xi\,\eta\,\zeta$ bezeichnet, da der Buchstabe x später in anderer Bedeutung gebraucht wird. Es müssen dann zufolge den bekannten Eigenschaften der Trägheitsaxen die Gleichungen bestehen

$$1) \ldots\ldots \int \xi\eta \, dM = 0, \quad \int \xi\zeta \, dM = 0, \quad \int \eta\zeta \, dM = 0.$$

Führt man nun Polarkoordinaten ein durch die Substitution (nach Legendre) $\xi = r \cos\psi$, $\eta = r \sin\psi \cos\vartheta$, $\zeta = r \sin\psi \sin\vartheta$, so bekommt man

2) ..... $dM = \rho\, dr\, r\, d\psi\, r\, d\vartheta \sin\psi = \rho\, r^2\, dr\, d\vartheta\, d\psi \sin\psi$.

ρ ist die Dichte. Diese ist hier, wo wir den Körper homogen voraussetzen, konstant. Sie sei daher für die folgende Rechnung der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt.

Die obigen Bedingungsgleichungen werden nun

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \cos\psi \sin^2\psi \cos\vartheta\, dr\, d\psi\, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \cos\psi \sin^2\psi \sin\vartheta\, dr\, d\psi\, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\psi \cos\vartheta \sin\vartheta\, dr\, d\psi\, d\vartheta = 0. \end{cases}$$

Bezüglich der Grenzen ist zu bemerken:

Jedes ϑ bestimmt eine von der x = Axe ausstrahlende Halbebene. ϑ läuft somit von 0 bis 2π. In jeder solchen Halbebene kann ψ nur mehr von 0 bis π variieren. Der Radius r endlich variiert von 0 bis R, wobei R eine Funktion von ψ und ϑ ist, welche die Gleichung der Oberfläche des Körpers darstellt. Die Funktion R ist also gerade das Gesuchte.

Führt man nun die Integration über r aus, und ersetzt zugleich mit Hilfe der Gleichung $x = \cos\psi$ das Differential $d\psi$ durch das Differential dx, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\text{Ia.} \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} R^5 \cos\psi \sin\psi \cos\vartheta\, dx\, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} R^5 \cos\psi \sin\psi \sin\vartheta\, dx\, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} R^5 \sin^2\psi \sin 2\vartheta\, dx\, d\vartheta = 0. \end{cases}$$

Um nun R als Funktion von ψ und ϑ darzustellen, wird die Form dieser Funktion willkürlich gewählt, und zwar wird

$$3) \ldots\ldots \quad R^5 = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots\ldots$$

gesetzt.

Die Funktion Y_n ist die Kugelfunktion n.Grades von zwei Variablen ψ und ϑ. Es ist nach Legendres Schreibweise:

$$\begin{aligned} 4) \ldots\ldots \quad Y_n = a X_n &+ \frac{d X_n}{dx} \sin \psi \,(b' \cos \vartheta + c' \sin \vartheta) \\ &+ \frac{d^2 X_n}{dx^2} \sin^2 \psi \,(b'' \cos 2\vartheta + c'' \sin 2\vartheta) \\ &+ \frac{d^3 X_n}{dx^3} \sin^3 \psi \,(b''' \cos 3\vartheta + c''' \sin 3\vartheta) \\ &+ \text{— — — — — — — — — —}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind a, b', c', b'', c'' .... vollkommen willkürliche Konstanten. X_n ist die Kugelfunktion n.Grades von einer Variablen x, also

$$5) \ldots\ldots \quad X_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n} \left[x^n - \frac{n\,(n-1)}{2\,(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)\,(2n-3)} x^{n-4} - \ldots\ldots \right],$$

wobei die Reihe bis x^1 oder x^0 läuft. Dabei ist hier $x = \cos \psi$.

Ist Z_n dieselbe Funktion, wie Y_n, nur mit anderen Konstanten α, β', γ', β'', γ'' .. an Stelle von a, b', c', b'', c'' ..., so gelten die Sätze

$$6) \ldots\ldots \quad \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_n Z_m \, dx \, d\vartheta = 0, \text{ wenn } m \neq n, \text{ und}$$

$$7) \ldots \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_n Z_n \, dx \, d\vartheta = \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ a\alpha + \frac{1}{2} n\,(n+1)\,(b'\beta' + c'\gamma') + \frac{1}{2} (n-1)\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(b''\beta'' + c''\gamma'') + \ldots\ldots \right\}.$$

Die unter den Integralen Ia stehenden Ausdrücke in ψ und ϑ sind nun Funktionen der Form Z_2. Setzt man nämlich

in Z_2 alle Koëffizienten gleich 0 bis auf β' und $\beta' = \frac{1}{3}$, so wird $Z_2 = \cos\psi \sin\psi \cos\vartheta$.

Setzt man $\gamma' = \frac{1}{3}$ und alle anderen Koëffizienten gleich 0, so wird $Z_2 = \cos\psi \sin\psi \sin\vartheta$.

Und setzt man $\gamma'' = \frac{1}{3}$ und alle anderen Koëffizienten gleich Null, so wird $Z_2 = \sin^2\psi \sin 2\vartheta$.

Führt man daher in den Gleichungen Ia für R^5 die Reihe in Y ein, so verschwinden bei der Integration gemäss Gleichung 6 alle Glieder bis auf die, welche Y_2 enthalten.

Man erhält somit nur für Y_2 Bedingungen, während alle übrigen Y willkürlich bleiben. Die Bedingungen für Y_2 sind:

$$\text{Ib.} \ldots \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_2 \sin\psi \cos\psi \cos\vartheta \, dx \, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_2 \sin\psi \cos\psi \sin\vartheta \, dx \, d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y_2 \sin^2\psi \sin 2\vartheta \, dx \, d\vartheta = 0. \end{cases}$$

Wertet man die drei Integrale nach Formel 7 aus, so findet sich, dass

$$b' = 0, \; c' = 0, \; c'' = 0$$

sein muss.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sind die Koordinatenaxen zugleich Trägheitsaxen des Körpers für den Anfangspunkt.

Wenn nun der Körper kinetische Symmetrie besitzen soll, so muss, modern gesprochen, das Trägheitsellipsoid eine Kugel werden, d. h. es müssen die Trägheitsmomente für die drei Trägheitsaxen gleich gross werden. Diese drei Trägheitsmomente sind

$$\int (\xi^2 + \eta^2) \, dM, \; \int (\xi^2 + \zeta^2) \, dM, \; \int (\eta^2 + \zeta^2) \, dM.$$

Diese Integrale können nun nur dann gleich gross sein, wenn

$$\text{II.} \ldots\ldots \int \xi^2 \, dM = \int \eta^2 \, dM = \int \zeta^2 \, dM$$

ist. Legendre betrachtet nun das Integral

$$8) \ldots\ldots \int (\lambda \xi^2 + \mu \eta^2 + \nu \zeta^2) \, dM,$$

in welchem die Koëffizienten λ, μ, ν willkürlich sind.

Durch Einführung der Polarkoordination erhält man

$$9) \ldots \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^4 \sin\psi (\lambda \cos^2\psi + \mu \sin^2\psi \cos^2\vartheta + \nu \sin^2\psi \sin^2\vartheta) \, dr \, d\psi \, d\vartheta,$$

oder

$$10) \ldots \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{R^5}{5} (\lambda \cos^2\psi + \mu \sin^2\psi \cos^2\vartheta + \nu \sin^2\psi \sin^2\vartheta) \, dx \, d\vartheta.$$

Nun ist $\lambda \cos^2\psi + \mu \sin^2\psi \cos^2\vartheta + \nu \sin^2\psi \sin^2\vartheta$

$$= \frac{\lambda+\mu+\nu}{3} + \frac{2\lambda-\mu-\nu}{3} X_2 + \frac{\mu-\nu}{6} \frac{d^2 X_2}{dx^2} \sin^2\psi \cos 2\vartheta, \ldots (11$$

wovon man sich leicht überzeugt. Dieser Ausdruck hat aber die Form $Z_0 + Z_2$. Z_0 ist nämlich eine Konstante, hier $\frac{\lambda+\mu+\nu}{3}$.

Setzt man nun in 10 für R^5 wieder die Reihe in den Y ein, so verschwinden gemäss Gleichung 6 bei der Integration alle Glieder bis auf die, welche Y_0 und Y_2 enthalten. Wertet man diese beiden Integrale dann nach der Formel 7 aus, so erhält man

$$11) \ldots\ldots \int (\lambda \xi^2 + \mu \eta^2 + \nu \zeta^2) \, dM = \frac{1}{5} \left\{ 4\pi Y_0 \frac{\lambda+\mu+\nu}{3} + \frac{4\pi}{5} \left(\frac{2\lambda-\mu-\nu}{3} a + 12 \frac{\mu-\nu}{6} b'' \right) \right\}.$$

Da nun $\int \xi^2 \, dM = \int \eta^2 \, dM = \int \zeta^2 \, dM$ sein soll, so darf $\int (\lambda \xi^2 + \mu \eta^2 + \nu \zeta^2) \, dM$ seinen Wert nicht ändern, wenn man von den drei Konstanten λ, μ, ν willkürlich eine gleich 1 und

die beiden anderen gleich 0 setzt. Das tritt aber nach Gleichung 11 ein, wenn in Y_2

$$a = 0 \text{ und } b'' = 0$$

ist. Da schon $b' = c' = c'' = 0$ sein muss, so folgt, dass überhaupt Y_2 verschwindet. Das für alle Axen durch den Anfangspunkt gleich grosse Trägheitsmoment wird dann $\frac{8\pi}{15} Y_0$, vorausgesetzt, dass die Dichte des Körpers gleich 1 ist. Ist die Dichte aber gleich ρ, so hat hat man $\rho \cdot \frac{8\pi}{15} Y_0$. Dieses Trägheitsmoment ist dasselbe, wie das einer Kugel vom Radius $\sqrt[5]{Y_0}$ für eine durch den Mittelpunkt laufende Axe. Da es nur von Y_0 abhängt, so besitzen auch alle Körper, deren Oberflächengleichung dasselbe Y_0 enthält, dasselbe Trägheitsmoment.

Ein von der Oberfläche $R^5 = Y_0 + Y_1 + Y_3 + Y_4 + \ldots$ umschlossener homogener Körper besitzt also gleiche Trägheitsmomente für alle Axen durch den Koordinatenanfangspunkt. Die Gleichheit der Trägheitsmomente soll aber stattfinden für alle Axen durch den Schwerpunkt. Es ist also noch dafür zu sorgen, dass der Anfangspunkt auch Schwerpunkt des Körpers wird. Die Bedingungen dafür sind

$$12) \ldots \int \xi \, dM = 0, \int \eta \, dM = 0, \int \zeta \, dM = 0.$$

Es wäre aber unbequem, diese Bedingungen in Rechnung zu ziehen. Es gibt einen einfacheren Weg, welchen auch Legendre eingeschlagen zu haben scheint. Er erwähnt nämlich nur, dass aus obigen Bedingungen folge, dass, wenn man $R^4 = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 \ldots$ setze, in dieser Reihe das Glied Z_1 verschwinden müsse und dass diese Bedingung mit der Bedingung, dass in der Reihe für R^5 das Glied Y_2 verschwinden muss, leicht in Uebereinstimmung gebracht werden könne. Dann gibt er ohne weitere Rechnung als „sehr allgemeines Beispiel“ die Schlussgleichung. Er ging also wohl nicht von der Bedingung $Z_1 = 0$ aus, sondern vielleicht auch von folgender Überlegung:

Die Gleichung $R^5 = Y_0 + Y_1 + Y_3 + Y_4 + \ldots\ldots$ sieht ausgeschrieben folgendermassen aus:

$$
\begin{aligned}
R^5 = a &+ b \cdot X_1 + \frac{d\,X_1}{dx} \sin\psi\,(b' \cos\vartheta + b'' \sin\vartheta) \\
&+ c \cdot X_3 + \frac{d\,X_3}{dx} \sin\psi\,(c' \cos\vartheta + c'' \sin\vartheta) \\
&+ \frac{d^2 X_3}{dx^2} \sin^2\psi\,(c''' \cos 2\vartheta + c'''' \sin 2\vartheta) \\
&+ \frac{d^3 X_3}{dx^3} \sin^3\psi\,(c^{\mathrm{V}} \cos 3\vartheta + c^{\mathrm{VI}} \sin 3\vartheta) \\
&+ d \cdot X_4 + \frac{d\,X_4}{dx} \sin\psi\,(d' \cos\vartheta + d'' \sin\vartheta) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Der Anfangspunkt wird nun sicher dann mit dem Schwerpunkt identisch sein, wenn er Mittelpunkt der Fläche ist, d. h. wenn jede durch den Anfangspunkt laufende Gerade die Fläche in zwei vom Anfangspunkt gleich weit entfernten Punkten trifft. Die Bedingung dafür ist, dass R sich nicht ändert bei gleichzeitiger Aenderung von ϑ in $\pi + \vartheta$ und ψ in $\pi - \psi$. Durch eine einfache Überlegung ergibt sich, dass diese Bedingung erfüllt ist, sobald alle Glieder, welche Kugelfunktionen mit ungeradem Index, sowie deren Ableitungen enthalten, wegfallen. Man beachte nur, dass X_n eine gerade oder ungerade Funktion von $x = \cos\psi$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Man erhält also dann folgende Gleichung:

A. .
$$
\begin{aligned}
R^5 = a &+ d \cdot X_4 + \frac{d\,X_4}{dx} \sin\psi\,(d' \cos\vartheta + d'' \sin\vartheta) \\
&+ \frac{d^2 X_4}{dx^2} \sin^2\psi\,(d''' \cos 2\vartheta + d'''' \sin 2\vartheta) \\
&+ \frac{d^3 X_4}{dx^3} \sin^3\psi\,(d^{\mathrm{V}} \cos 3\vartheta + d^{\mathrm{VI}} \sin 3\vartheta) \\
&+ \frac{d^4 X_4}{dx^4} \sin^4\psi\,(d^{\mathrm{VII}} \cos 4\vartheta + d^{\mathrm{VIII}} \sin 4\vartheta) \\
&+ f \cdot X_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Legendre gibt aber nicht diese Gleichung, sondern als das „sehr allgemeine Beispiel“ folgende speziellere Gleichung an:

$$\text{B.....}\begin{cases} R^5 = A + BX_4 + B'\dfrac{d^2X_4}{dx^2}\sin^2\psi\cos 2\vartheta \\ \qquad\qquad + B''\dfrac{d^4X_4}{dx^4}\sin^4\psi\cos 4\vartheta \\ \qquad + CX_6 + C'\dfrac{d^2X_6}{dx^2}\sin^2\psi\cos 2\vartheta \\ \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Er schliesst also zunächst auch noch die Glieder aus, bei welchen cosinus und sinus von ungeraden Vielfachen von ϑ vorkommen, und erreicht damit, dass R sich nicht ändert, wenn man ϑ allein um π wachsen lässt oder ψ allein durch $\pi - \psi$ ersetzt. Dadurch wird die Fläche orthogonal symmetrisch in Bezug auf die x-Axe und die yz-Ebene. Ferner lässt Legendre alle die Glieder weg, in welchen sin $n\vartheta$ vorkommt. Dabei handelt es sich jetzt nur mehr um gerade n. Das Fehlen dieser Glieder bewirkt daher, dass R auch unverändert bleibt, wenn man ϑ durch $\pi - \vartheta$ ersetzt, so dass die Fläche auch bezüglich der xy-Ebene und der xz-Ebene orthogonal symmetrisch wird.

Wir wollen die Gleichung A die „allgemeine Legendresche Gleichung“ nennen und die Gleichung B die „spezielle Legendresche Gleichung“.

Zu bemerken ist noch, dass Laplace mit der Gleichung $R^5 = Y_0 + Y_1 + Y_3 + Y_4 + \ldots\ldots$ abschliesst und somit die Bedingungen für die Identität des Anfangspunktes mit dem Schwerpunkt vernachlässigt, ein Versehen, das schon Legendre erwähnt.

Zum Schlusse sei noch die Bemerkung Todhunters[1]) zurückgewiesen, dass Laplace in seiner Mécanique céleste das Problem der Körper von kinetischer Symmetrie nicht löse, sondern nur bis zur Aufstellung der Bedingungen für die

[1]) Todhunter, History of the theories of attraction and the figure of the earth, Band II, Nr. 953.

Identität der Koordinatenaxen mit den Trägheitsaxen führe. Diese Bemerkung ist nämlich insofern falsch, als Laplace in der Mécanique céleste auf dieses Problem überhaupt nicht zu sprechen kommt, sondern nur im Laufe seiner Untersuchungen über die Figur der Planeten die Koordinatenaxen in die Trägheitsaxen zu legen und die Bedingungen dafür aufzustellen hat.[1])

II.

Diskussion der in den Legendreschen Gleichungen enthaltenen einfachsten Formen.

Ehe wir an die Betrachtung der durch die Gleichungen A und B dargestellten Flächen gehen, muss noch ein Punkt besprochen werden. Die in den beiden Gleichungen enthaltenen Konstanten sind völlig willkürlich. Es fragt sich daher, ob man sie so bestimmen darf, dass der Radius R für gewisse Richtungen auch negativ wird. Gerade in diesem Fall treten sehr interessante Formen auf. Die von solchen Flächen umschlossenen Körper sind aber, wie wir zeigen werden, nicht mehr brauchbar.

Zunächst ist es ja allgemein üblich, den Radius Vektor als eine stets positive Grösse anzusehen. Es liegt aber kein zwingender Grund vor, ihn nicht auch einmal negativ werden zu lasen, d. h. seine Richtung umzukehren. Manchmal ist man ja dazu direkt genötigt. Es sei nur an die Polargleichung der Hyperbel, bezogen auf einen Brennpunkt als Anfangspunkt, erinnert, allwo der eine Hyperbelast auch durch negative Radien erzeugt wird. Wenn man also hier den Radius nicht negativ werden lassen darf, so muss ein besonderer Grund vorliegen, und dieser ist folgender:

[1]) Laplace, Méc. cél., 3. Buch, Kap. IV, Nr. 32, p. 92.

Die Trägheitsmomente für die drei Koordinatenaxen waren bestimmt durch das Integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^5}{5} (\lambda \cos^2\psi + \mu \sin^2\psi \cos^2\vartheta + \nu \sin^2\psi \sin^2\vartheta) \sin\psi \, d\psi \, d\vartheta.$$

Nun ist ein Trägheitsmoment eine Summe aus unendlich vielen unendlich kleinen positiven Grössen, nämlich den Trägheitsmomenten aller Massenteilchen. Im obigen Integral ist die Klammer auch eine stets positive Grösse. Ebenso ist $\sin\psi$ stets positiv, da ψ nur von 0 bis π läuft. Ferner sind $d\psi$ und $d\vartheta$ immer positive Grössen, da ψ und ϑ immerfort wachsen. Es muss also, damit man eine Summe über nur positive Elemente erhält, auch R^5 stets positiv sein. Dann muss auch R selbst stets positiv sein.

Wenn R negativ wäre, so würden die Elementarträgheitsmomente, welche von den Teilen des Körpers herrührten, in welchen R das negative Zeichen hätte, auch mit den negativen Zeichen auftreten und sich also von den übrigen subtrahieren, statt sich zu addieren. Das Gesamtträgheitsmoment würde dann zu klein, also falsch werden.

Möglich ist nur noch der Fall, dass R stets negativ ist. Dann werden alle Elementarträgheitsmomente negativ und summieren sich wieder alle zu einander, nur diesmal zu einer negativen Summe, welche aber den richtigen absoluten Wert besitzt.

Man sieht leicht ein, dass man, wenn man das Zeichen von R variabel liesse, sofort auf Unmöglichkeiten käme. Wenn nämlich R stets positiv oder stets negativ sein muss, so kann nicht $Y_0 = 0$ genommen werden, weil $Y_1 + Y_3 + \ldots$. eine bald positive, bald negative Funktion ist, so dass R sein Zeichen wechseln würde, wenn $Y_0 = 0$ wäre. Y_0 darf sich dem Wert Null nicht über eine durch die extremen Werte der Funktion $Y_1 + Y_3 + \ldots$. festgelegte Grenze hinaus nähern. Lässt man nun aber R variabel in seinem Zeichen, so kann auch $Y_0 = 0$

gesetzt werden. Setzt man aber $Y_0 = 0$, so erhält man einen Körper, welcher nach der Rechnung das Trägheitsmoment Null haben müsste. Denn das Trägheitsmoment bestimmt sich durch den Ausdruck $\frac{8\pi}{15} \rho Y_0$. Ein Körper mit dem Trägheitsmoment Null ist aber ein Unding. Diese Unmöglichkeit kommt daher, dass eben, wenn R im Zeichen variiert, das Integral, aus welchem sich die Trägheitsmomente berechnen, diese Trägheitsmomente nicht mehr richtig angibt. Dann besteht natürlich auch keine Garantie mehr für die Gleichheit der Trägheitsmomente für die drei Trägheitsaxen, d. h. der Körper wird im allgemeinen nicht mehr von kinetischer Symmetrie sein.

Nach dieser Vorbemerkung können wir nun an die Untersuchung der in der Legendreschen Gleichungen enthaltenen einfachsten Flächen gehen. Wir beschränken uns dabei auf die Flächen, bei welchen R stets positiv oder stets negativ ist, und welche somit wirklich Körper von kinetischer Symmetrie einhüllen. Ferner beschränken wir uns ein- für allemal in den Gleichungen auf eine endliche Anzahl Glieder, d. h. wir nehmen die in den rechten Seiten der Gleichungen stehenden unendlichen Reihen an irgend einer Stelle abgebrochen an.

Um die Form der durch die Gleichungen A und B dargestellten Flächen zu erkennen, werden wir am besten die durch die x-Axe gelegten ebenen Schnitte betrachten. Einen solchen Schnitt erhält man, wenn man dem ϑ einen festen Wert beilegt und r dann als Funktion von ψ allein betrachtet. Man hat dann immer eine Gleichung der Form $r^5 = C + f(\psi)$ oder $F(r, \psi) = r^5 - C - f(\psi) = 0$. (Wir setzen von jetzt ab an Stelle von R den Buchstaben r.) $f(\psi)$ ist eine ganze, rationale Funktion von cos ψ und sin ψ, C ist eine Konstante. Diese Gleichung stellt Kurven dar, welche nur im Anfangspunkt Singularitäten aufweisen können. $f(\psi)$ ist nämlich eine eindeutige Funktion von ψ. Jeder Radius Vektor trifft also die Kurve in nur einem Punkt. Träte aber ein Doppelpunkt auf, der nicht im Anfangspunkt läge, so müsste die mit dem Doppelpunkte notwendig

auch auftretende Schleife vom Radius in mehr als einem Punkte geschnitten werden, und das widerspräche der Eindeutigkeit von $f(\psi)$. Ein Doppelpunkt kann also nur im Anfangspunkt selbst auftreten.

Was Spitzen betrifft, so können diese, auch wegen der Eindeutigkeit der Funktion $f(\psi)$, zunächst nur in der Weise vorhanden sein, dass die Rückkehrtangente durch den Anfangspunkt läuft. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Spitzen auch nur im Anfangspunkt selbst auftreten können. Die Gleichung der Tangente ist für Polarkoordinaten

$$R\left[\frac{dr}{d\psi}\sin(\Psi-\psi)-r\cos(\Psi-\psi)\right]+r^2=0.$$

R und Ψ sind die laufenden Koordinaten. Wenn nun ein singulärer Punkt auftreten soll, so muss $\frac{dr}{d\psi}$ zunächst unbestimmt und dann doppeldeutig werden. Wenn $F(r, \psi) = 0$ die Kurvengleichung ist, so hat man

$$\frac{dr}{d\psi}=-\frac{\partial F}{\partial\psi}:\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Und $F = r^5 - C - f(\psi)$, $\frac{\partial F}{\partial\psi} = -\frac{df(\psi)}{d\psi}$, $\frac{\partial F}{\partial r} = 5r^4$.

Somit ist $\frac{dr}{d\psi} = \frac{df(\psi)}{d\psi} : 5r^4$.

Nun ist $f(\psi)$ und also auch $\frac{df(\psi)}{d\psi}$ eine ganze, rationale Funktion von $\sin\psi$ und $\cos\psi$, und diese Funktion kann nicht unbestimmt werden. Also kann $\frac{dr}{d\psi}$ nur dann einen unbestimmten Wert bekommen, wenn $\frac{df(\psi)}{d\psi}$ und r zu gleicher Zeit verschwinden. Nun ist aber $r^5 = C + f(\psi)$. Es ist also $\frac{df(\psi)}{d\psi} = 0$ die Bedingung dafür, dass r einen extremen Wert annimmt. Wir können daher sagen:

Eine Singularität kann nur dann eintreten, wenn r an einer Stelle, wo es ein Maximum oder Minimum sein kann, gleich 0 wird.

Es kann also auch eine Spitze nur im Anfangspunkt selbst erscheinen.

Wenn nun $\frac{dr}{d\psi} = \frac{0}{0}$ ist, so gilt die Formel

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\psi} \pm \sqrt{-\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\psi}\right)^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}}.$$

Nun ist $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 20\,r^3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\psi} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2} = -\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2}$. Also

$$\frac{dr}{d\psi} = \pm\sqrt{\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} : 20\,r^3}.$$

Da nun $r = 0$ ist, so wird $\frac{dr}{d\psi} = \pm\infty$, wenn $\sqrt{\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} : 20\,r^3}$ reell ist, und wenn $\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} \neq 0$ ist, d. h. wenn r ein Extremum ist.

Für $\frac{dr}{d\psi} = \pm\infty$ geht die Gleichung der Tangente über in $R\sin(\Psi - \psi) = 0$ oder $\Psi = \psi$. Das ist eine in der Richtung ψ durch den Anfangspunkt laufende Gerade. Man hat also eine Tangente und daher eine Spitze.

Wenn also r an einer Stelle, an welcher es Maximum oder Minimum ist, gleich Null wird, so tritt immer eine Spitze auf, vorausgesetzt, dass nicht $\sqrt{\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} : 20\,r^3}$ imaginär wird. Das ist aber nicht möglich. Denn wenn r an einer Stelle, wo es ein Minimum ist, gleich 0 wird, so muss es sich dem Werte 0 von der positiven Seite her nähern, also positiv sein. Wenn aber r ein Minimum ist so, ist auch $\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} > 0$. Die Wurzel

ist also reell. Ebenso lässt sich zeigen, dass die Wurzel reell ist, wenn r ein Maximum ist.

Der Fall $\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} = 0$ kommt nicht vor, wie sich zeigen wird.

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Flächen.

A. Die allgemeine Legendresche Gleichung.

Gleichung A im vorigen Abschnitt lautete:

$$r^5 = a + d \cdot X_4 + \frac{d X_4}{dx} \sin \psi \,(d' \cos \vartheta + d'' \sin \vartheta)$$
$$+ \frac{d^2 X_4}{dx^2} \sin^2 \psi \,(d''' \cos 2\vartheta + d^{IV} \sin 2\vartheta)$$
$$+ \frac{d^3 X_4}{dx^3} \sin^3 \psi \,(d^{V} \cos 3\vartheta + d^{VI} \sin 3\vartheta)$$
$$+ \frac{d^4 X_4}{dx^4} \sin^4 \psi \,(d^{VII} \cos 4\vartheta + d^{VIII} \sin 4\vartheta)$$
$$+ f \cdot X_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Koëffizienten a, d, d' u. s. w. sind willkürlich. Es kann sich hier natürlich nur um die Betrachtung der einfachsten Fälle handeln, da die Gleichung unendlich viele Flächen enthält.

Es seien zunächst die Werte von X_4 und seinen Abgeleiteten angegeben:

$$X_4 = \frac{1}{8}(35 x^4 - 30 x^2 + 3).$$

$$\frac{d X_4}{dx} = \frac{5}{2}(7 x^3 - 3 x). \qquad \frac{d^2 X_4}{dx^2} = \frac{15}{2}(7 x^2 - 1).$$

$$\frac{d^3 X_4}{dx^3} = 105\, x. \qquad \frac{d^4 X_4}{dx^4} = 105.$$

Wählt man nun alle Koëffizienten ausser a gleich Null, so hat man $r^5 = a$. Das ist eine Kugel. Die Kugel erhalten wir also als den einfachsten Körper von kinetischer Symmetrie. Ihr Trägheitsmoment ist $\rho \cdot \frac{8\pi}{15} a$ oder $\rho \frac{8\pi}{15} r^5$.

Die nächst einfache Fläche erhält man, wenn man nur die beiden ersten Koëffizienten von Null verschieden wählt. Ihre Gleichung ist $r^5 = a + d \cdot X_4$. Das ist eine Rotationsfläche, da r von ϑ unabhängig ist. Die Rotationsaxe ist die x-Axe.

Die Form der Fläche hängt offenbar nur ab von dem Verhältnis a : d. Man kann also ohne weitere Spezialisierung $d = \frac{8}{5}$ setzen und a allein willkürlich lassen. Man erhält dann die Gleichung

$$r^5 = a + \frac{1}{5}(35 \cos^4\psi - 30 \cos^2\psi + 3), \text{ oder}$$

$$r^5 = c + 7 \cos^4\psi - 6 \cos^2\psi, \text{ wenn man } a + \frac{3}{5} = c$$

setzt. Das Trägheitsmoment des von der Fläche umschlossenen homogenen Körpers ist dann

$$\rho \cdot \frac{8\pi}{15}\left(c - \frac{3}{5}\right).$$

Die Gleichung $r^5 = c + 7 \cos^4\psi - 6 \cos^2\psi$ stellt eine ebene Kurve, den Meridian der Rotationsfläche, dar.

Wir setzen $7 \cos^4\psi - 6 \cos^2\psi = f(\psi)$ und untersuchen zunächst diese Funktion.

$\frac{d f(\psi)}{d\psi} = 4 \cos\psi \sin\psi (3 - 7 \cos^2\psi)$ verschwindet für

$\sin\psi = 0$, $\quad \cos\psi = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\quad \cos\psi = 0$, $\quad$ oder

$\psi = 0, \pi$, $\quad \psi = \mu, \pi - \mu$, $\quad \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,

wenn $\mu = 49^0\,6'$ ca. ist.

$f(\psi)$ nimmt für diese Werte von ψ der Reihe nach die Werte $+1$, $-\frac{2}{7}$, 0 an. Der erste und letzte Wert ist ein Maximum, der mittlere ein Minimum, wie sich aus der Untersuchung von $\frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2}$ oder auch unmittelbar aus der Berechnung der verschiedenen Werte von $f(\psi)$ ergibt.

$f(\psi)$ verschwindet ferner ausser an den Stellen $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ auch noch für $\cos\psi = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$ oder $\psi = \alpha,\ \pi-\alpha$, wenn $\alpha = 22^0\ 13'$ ca. Tabelle I gibt die Werte von $f(\psi)$, Figur 1 die zugehörige Funktionskurve.

ψ	$f(\psi)$
0	1
$\alpha = 22^0 13'$	0
$\mu = 49^0 6'$	$-9/7$
$\pi/2$	0
$\pi-\mu$	$-9/7$
$\pi-\alpha$	0
π	1

Tab. I.

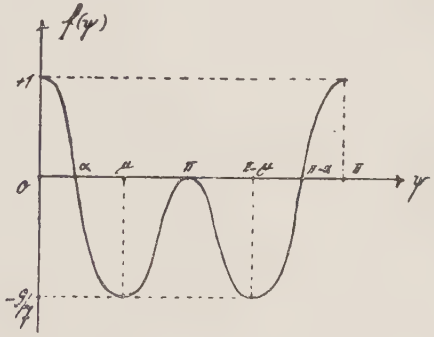

Fig. 1.

Die Gleichung des Meridians unserer Rotationsfläche ist nun $r = \sqrt[5]{c + f(\psi)}$. Die Konstante c muss so gewählt werden, dass der Radius r immer positiv oder immer negativ ist. Je nach dem Werte von c erhält man vier verschiedene Typen der Fläche. Wir wählen für c folgende Werte

1) $c = 3$. 2) $c = 9/7$. 3) $c = -1$. 4) $c = -2$.

ad 1. Tabelle II gibt die Werte von r, Fig. 2 die Meridiankurve. Es ist hier und bei den folgenden Figuren nicht die halbe, sondern die ganze Kurve gezeichnet. Die beiden Hälften müssen orthogonal symmetrisch liegen in Bezug auf die Rotationsaxe x. Ferner ist der Kreis vom Radius $\sqrt[5]{c}$ eingezeichnet.

ad 2. Tabelle III gibt die Werte des Radius Vektor, Fig. 3 die Meridiankurve. Es treten hier bei $\psi = \mu$ und $\psi = \pi-\mu$ Spitzen auf.

ad 3. Siehe Tabelle IV und Fig. 4. Man hat bei dieser Kurve Spitzen für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$. r ist beständig negativ.

ψ	r
0	1,319 (Ma.)
α	1,246 $\left(=\sqrt[5]{3}\right)$
μ	1,114 (Mi.)
$\pi/2$	1,246 (Ma.)
$\pi-\mu$	1,114 (Mi.)
$\pi-\alpha$	1,246
π	1,319 (Ma.)

Tab. II.

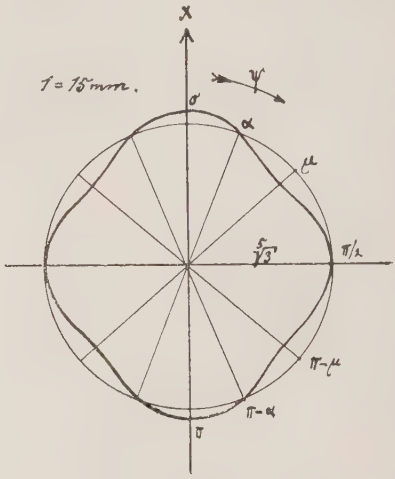

Fig. 2.

ad 4. Siehe Tabelle V und Fig 5. Die Kurve umschlingt wieder den Anfangspunkt in einem Zuge, ohne Singularitäten zu besitzen. r ist auch hier beständig negativ.

ψ	r
0	1,180 (Ma.)
α	1,052 $\left(=\sqrt[5]{\frac{9}{7}}\right)$
μ	0 (Mi.)
$\pi/2$	1,052 (Ma.)
$\pi-\mu$	0 (Mi.)
$\pi-\alpha$	1,052
π	1,180 (Ma.)

Tab. III.

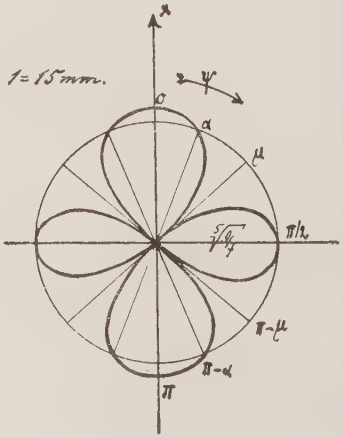

Fig. 3.

Die Figuren 6 und 7 geben Parallelprojektionen der Flächen, deren Meridiane in Fig. 2 und 3 dargestellt sind. Die Projektionsstrahlen sind parallel einem zur x-Axe senkrecht stehenden Strahle, das Licht ist von rechts oben einfallend gedacht.

ψ	r	
0	0	(Ma.)
α	$-1\ (=\sqrt[5]{-1})$	
μ	$-1{,}180$	(Mi.)
$\pi/2$	-1	(Ma.)
$\pi-\mu$	$-1{,}180$	(Mi.)
$\pi-\alpha$	-1	
π	0	(Ma.)

Tab. IV.

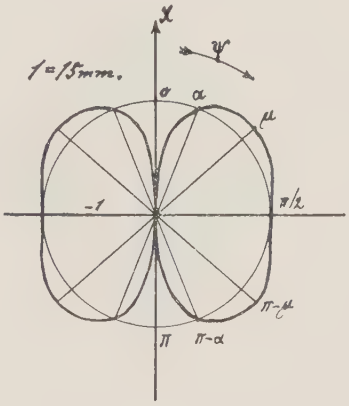

Fig. 4.

Am merkwürdigsten gestaltet ist die in Fig. 7 dargestellte Fläche. Man hat einen wulstartigen Körper, eine kreisrunde,

ψ	r	
0	-1	(Ma.)
α	$-1{,}119$	$(=\sqrt[5]{-2})$
μ	$-1{,}269$	(Mi.)
$\pi/2$	$-1{,}149$	(Ma.)
$\pi-\mu$	$-1{,}269$	(Mi.)
$\pi\ \ \alpha$	$-1{,}149$	
π	-1	(Ma.)

Tab. V.

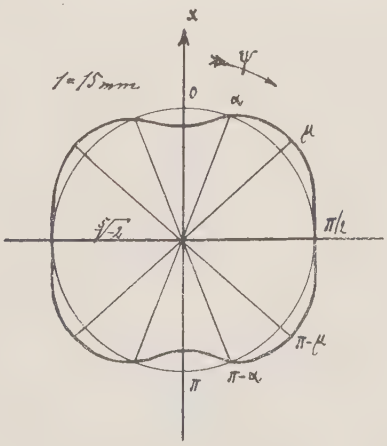

Fig. 5.

am Rand abgerundete, nach der Mitte zu bis auf die Dicke Null sich zusammenziehende Scheibe; auf den Mittelpunkt setzen sich dann oben und unten birnförmige in eine Spitze auslaufende Körper mit ihren Spitzen auf.

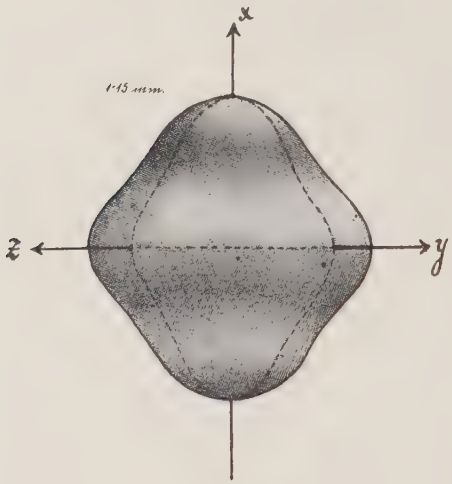

Fig. 6.

Die Gestalt der beiden anderen Flächen, deren Meridiane in Fig. 4 und 5 dargestellt sind, kann man sich mit Hilfe der Meridiankurven leicht vorstellen.

Wenn man der Konstanten c einen von den im vorangehenden angenommenen vier Werten verschiedenen Wert erteilt, welcher aber immer den Bedingungen $c > {}^9/_7$ oder $c < -1$ genügen muss, damit r stets positiv oder negativ bleibt, so erhält man immer Flächen, deren Meridiankurven dem Typus der Figuren 2 und 5 entsprechen. Nur werden die Ein- und Ausbuchtungen immer schwächer, je weiter sich c von ${}^9/_7$ nach der positiven oder von -1 nach der negativen Seite hin entfernt. Für $c = \pm \infty$ verschwinden sie ganz und man hat dann eine unendlich grosse Kugel.

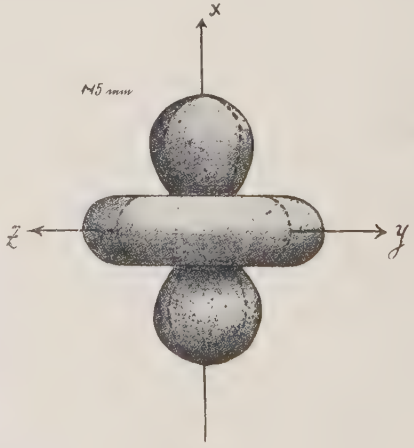

Fig. 7.

Wir gehen nun weiter und nehmen in unserer Gleichung die ersten drei Koëffizienten von Null verschieden an. Wir haben dann

$$r^5 = a + d \cdot X_4 + d' \cdot \frac{dX_4}{dx} \sin\psi \cos\vartheta.$$

Diese Fläche, mit deren Untersuchung wir die Diskussion für die erweiterte Legendresche Gleichung beenden wollen, sei nicht mehr in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet. Es werde vielmehr die Spezialisierung getroffen, dass der Koëffizient von X_4 verschwinden soll.

Die Form der dadurch erhaltenen Fläche hängt wieder nur ab von dem Verhältnis $a : d'$, weshalb man ohne weitere Spezialisierung $d' = \frac{2}{5}$ setzen und a allein willkürlich lassen kann. Die Gleichung lautet dann:

$$r^5 = a + (7\cos^2\psi - 3)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta.$$

Wir setzen $(7\cos^2\psi - 3)\cos\psi \sin\psi = \varphi(\psi)$ und untersuchen vor allem diese Funktion.

Die Stellen, an welchen $\varphi(\psi)$ extreme Werte hat, bestimmen sich durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi} = 28\cos^4\psi - 27\cos^2\psi + 3 = 0.$$

Man findet $\cos\psi = \pm\sqrt{\frac{27}{56} \pm \frac{1}{56}\sqrt{27^2 - 6\cdot 56}}$ oder

$$\psi = \mu,\ \pi-\mu,\ \mu',\ \pi-\mu', \text{ wenn}$$
$$\mu = 23^0\,52\tfrac{1}{2}' \text{ ca. und } \mu' = 69^0\,1\tfrac{1}{2}' \text{ ca. ist.}$$

Es ergibt sich weiter, dass bei $\psi = \mu$ und $\psi = \pi-\mu'$ ein Maximum, bei $\psi = \mu'$ und $\psi = \pi-\mu$ aber ein Minimum liegt.

Den Wert Null erreicht $\varphi(\psi)$ bei $\psi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ und $\psi = \alpha, \pi-\alpha$, wenn $\alpha = 49^0\,6'$ ca.

Tabelle VI gibt die Werte von $\varphi(\psi)$, Fig. 8 die Funktionskurve.

ψ	$\varphi(\psi)$
0	0
μ (24°)	1,056 (Ma)
α (49°)	0
μ' (69°)	— 0,70293 (Mi.)
$\pi/2$	0
$\pi - \mu'$	0,70293 (Ma.)
$\pi - \alpha$	0
$\pi - \mu$	— 1,056 (Mi.)
π	0

Tab. VI.

Die Fläche hat die Gleichung $r = \sqrt[5]{a + \cos\vartheta \cdot \varphi(\psi)}$. Man sieht sofort, dass auf der Fläche vier Kreise liegen. Es sind nämlich erstens die Schnittkurven für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ zwei Halbkreise von Radius $\sqrt[5]{a}$, welche sich zu einem Kreise zusammensetzen. Zweitens hat in jeder durch die x-Axe laufenden Schnittebene der Radius der Fläche den Wert $\sqrt[5]{a}$ für die Richtungen $\psi = \alpha, \frac{\pi}{2}, \pi - \alpha$. Alle Punkte, für welche $\psi = \alpha, \pi - \alpha$ ist, liegen auf einem Kreiskegel

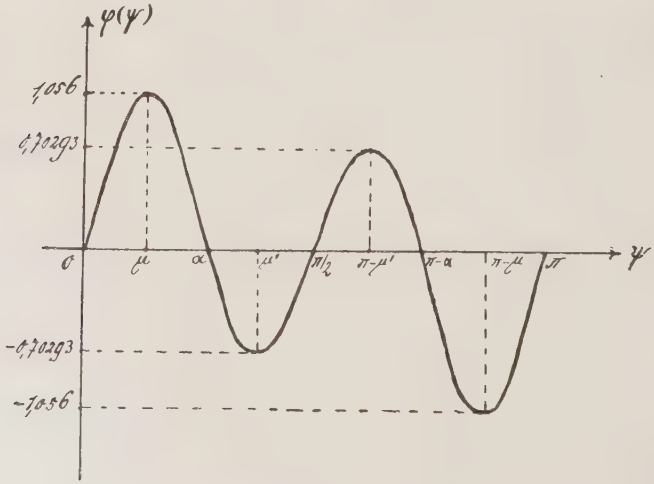

Fig. 8.

mit der Öffnung 2α und der x-Axe als Axe, und alle Punkte, für welche $\psi = \frac{\pi}{2}$, liegen in der Ebene y z. Diese Ebene und jener Kegel treffen also die Fläche in Punkten, welche alle vom

Anfangspunkt den Abstand $\sqrt[5]{a}$ haben, d. h. Ebene und Kegel schneiden die Fläche in Kreisen. Diese drei Kreise liegen in parallelen Ebenen. Der mittlere in der y z-Ebene liegende hat den Radius $\sqrt[5]{a}$, die beiden anderen haben den Radius $\sqrt[5]{a \cdot \sin \alpha}$.

Die vier auf der Fläche liegenden Kreise liegen gleichzeitig auf der mit der Fläche konzentrischen Kugel vom Radius $\sqrt[5]{a}$.

Die vier Kreise schneiden sich, wie man leicht erkennt, in sechs Punkten. Diese sechs Punkte sind also Doppelpunkte der Schnittkurve von Kugel und Fläche. Daher berührt die Kugel die Fläche in den sechs Schnittpunkten der vier Kreise.

Die sechsfach berührende Kugel vom Radius $\sqrt[5]{a}$ hat auch, wenn von derselben Materie erfüllt, dasselbe Trägheitsmoment wie der von unserer Fläche eingeschlossene homogene Körper, nämlich das Trägheitsmoment $\rho \cdot \frac{8\pi}{15} \cdot a$.

Die Form unserer Fläche hängt nun noch ab vom Werte der Konstanten a. Dieser Wert muss den Bedingungen $a > 1{,}056$ oder $a \leq -1{,}056$ genügen, damit r stets positiv oder stets negativ bleibt.

Wenn $a \geq 1{,}056$ ist, so hat man die Fälle $a > 1{,}056$ und $a = 1{,}056$ zu unterscheiden. Um einen Typus für den ersten Fall zu erhalten, wählen wir $a = 1{,}5$. Hier treten die Abweichungen von der Kugelgestalt noch stark hervor. Mit wachsendem a verschwinden sie allmählich und für $a = \infty$ hat man eine unendlich grosse Kugel, ganz wie bei der vorhin betrachteten Rotationsfläche.

Für negative Werte von a bekommt man hier genau dieselben Formen, wie für positive Werte, wie wir sogleich beweisen werden. Eine Untersuchung für negative Werte von a ist also überflüssig.

Bei der vorhin betrachteten Rotationsfläche war nur die eine Meridiankurve zu untersuchen. Hier müssen wir die

Schnitte mit verschiedenen durch die x-Axe gelegten Ebenen betrachten. Eigentlich haben wir nur mit Halbebenen zu schneiden, weil $\vartheta =$ konst. eine von der x-Axe ausgehende Halbebene gibt. Aber man kann, wenn der Schnitt mit einer Halbebene bekannt ist, sofort den Schnitt mit der zugehörigen anderen Halbebene zeichnen, da man weiss, dass der Anfangspunkt der Mittelpunkt der Fläche ist, und also jedem Punkt ein diametral gegenüberliegender, vom Anfangspunkt gleich weit entfernter Punkt entspricht. Man findet also zu einer Halbkurve die andere, indem man einfach die Radien nach rückwärts um sich selbst verlängert.

Nun sieht man auch, dass man für $-a$ dieselbe Fläche erhält, wie für $+a$. Denn ersetzt man a durch $-a$, so erhält man in jeder Schnittkurve dieselben Zahlenwerte für r, nur haben sie umgekehrte Reihenfolge und negatives Zeichen. Wenn man nun die Radien nur negativ machen würde, so bliebe die vollständige Schnittkurve dieselbe. Dadurch aber, dass die Reihenfolge umgekehrt wird, entsteht lediglich eine 180^0 betragende Drehung der Kurve um die x-Axe. Diese Drehung geschieht bei jeder Kurve und man erhält infolgedessen wieder dieselbe Fläche wie vorher. Nur ist sie um die x-Axe um 180^0 gedreht.

Wir wollen nun die Schnittkurven für die beiden Fälle $a = 1{,}5$ und $a = 1{,}056$ darstellen.

a) $a = 1{,}5$.

Es wurden die Halbschnitte für $\vartheta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ berechnet und zugleich die dazu gehörigen anderen Halbschnitte $\left(\vartheta = \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ mitgezeichnet. Ausserdem wurden die Schnitte mit der sechsfach berührenden Kugel eingezeichnet.

1) $\vartheta = 0$. Es ist $\cos \vartheta = 1$, also die Gleichung der Schnittkurve $r = \sqrt[5]{1{,}5 + \varphi(\psi)}$. Tabelle VII gibt die Werte

von r, Fig. 9 die Kurve. Es ist dies eine geschlossene Kurve. Man darf aber nicht vergessen, dass sie aus zwei Halbkurven, welche auf der x-Axe aneinanderstossen, zusammengesetzt ist. Es drängt sich dabei die Frage auf, ob denn die beiden Halbkurven von beiden Seiten unter demselben Winkel auf die x-Axe treffen und sich also wirklich zu einer einzigen Kurve zusammenschliessen, oder ob vielleicht ein Eck auftritt. Man sieht nun aber aus der Symmetrie der Funktionskurve für

ψ	r
0	1,084
μ	1,206 (Ma.)
α	1,084
μ'	0,956 (Mi.)
$\pi/2$	1,084
$\pi-\mu'$	1,171 (Ma.)
$\pi-\alpha$	1,084
$\pi-\mu$	0,850 (Mi.)
π	1,084

Tab. VII.

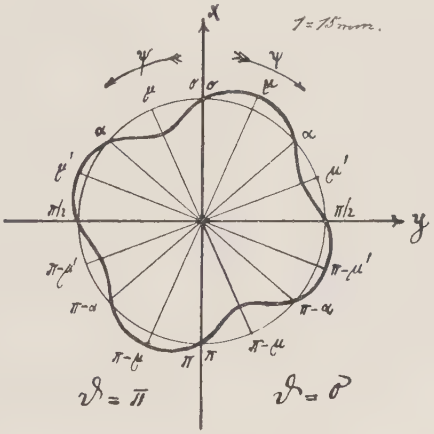

Fig. 9.

$\varphi(\psi)$, dass diese Kurve bei $\psi = 0$ unter demselben Winkel die ψ-Axe trifft, wie bei $\psi = \pi$. Es hat also $\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}$ bei 0 und π denselben Wert, folglich hat auch die Ableitung $\frac{dr}{d\psi} = \cos\vartheta \cdot \frac{d\varphi(\psi)}{d\psi} : 5r^4$ bei $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ denselben Wert, nachdem auch r an diesen beiden Stellen gleiche Werte hat. Daraus folgt, dass unsere Schnittkurve in der That bei $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ gleiche Winkel mit der x-Axe bildet, und dass weiterhin die zwei Halbkurven von beiden Seiten unter demselben Winkel die x-Axe treffen und sich somit zusammenschliessen, wie eine einzige Kurve.

2) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (45°).

Es ist hier $\cos\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711$; also ist die Gleichung der Schnittkurve $r = \sqrt[5]{1{,}5 + 0{,}70711 \cdot \varphi(\psi)}$.

ψ	r
0	1,084
μ	1,176 (Ma.)
α	1,084
μ'	1,001 (Mi.)
$\pi/2$	1,084
$\pi - \mu'$	1,148 (Ma.)
$\pi - \alpha$	1,084
$\pi - \mu$	0,945 (Mi.)
π	1,084

Tab. VIII.

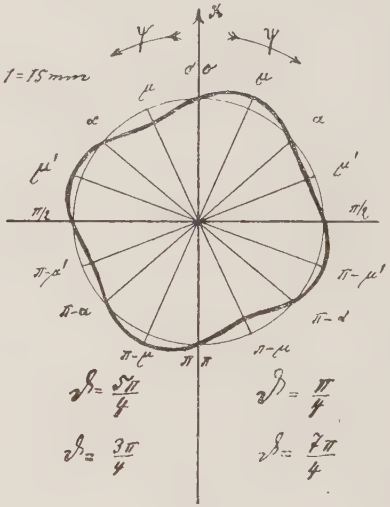

Fig. 10.

Tab. VIII gibt die Werte von r, Fig. 10 die Kurve. Die dem $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ entsprechende Hälfte liegt rechts, die dem $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$ entsprechende Hälfte aber links.

3) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (90°).

Es ist $\cos\vartheta = 0$, also die Gleichung der Kurve $r = \sqrt[5]{1{,}5}$, oder $r = 1{,}084$. Das ist einer der vier Kreise, welche auf der Fläche liegen.

4) $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ (135°).

Tabelle IX gibt die Werte von r. Man sieht daraus im Vergleich mit Tabelle VIII, dass die Kurve sich aus der Kurve

ψ	r
0	1,084
μ	0,945 (Mi.)
α	1,084
μ'	1,148 (Ma.)
$\pi/2$	1,084
$\pi-\mu'$	1,001 (Mi.)
$\pi-\alpha$	1,084
$\pi-\mu$	1,176 (Ma.)
π	1,084

Tab. IX.

von Fig. 10 einfach ergibt, wenn man letztere um die x-Axe um 180° dreht. Fig. 10 kann daher zugleich die Kurve für $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ bezw. $\vartheta = \frac{7\pi}{4}$ darstellen. Nur liegt die dem Werte $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ entsprechende Hälfte links, die dem $\vartheta = \frac{7\pi}{4}$ entsprechende Hälfte aber rechts.

Mit Hilfe der in Fig. 9 und 10 gezeichneten Schnitte und der Fig. 11 wird man sich leicht ein Bild der Fläche machen können. Fig. 11 ist eine Parallelprojektion. Die Projektionsstrahlen laufen parallel der Schnittlinie der Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ mit der y z-Ebene. Das Licht ist von oben einfallend gedacht. Die Linien 1 und 2 sind die Schnitte mit den Ebenen x z $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ und x y $(\vartheta = 0)$. Ersterer Schnitt ist ein Kreis. Linie 5, der Schnitt mit der Ebene x y, ist ebenfalls ein Kreis und 3 und 4 sind die noch übrigen zwei Kreise auf der Fläche. Die vier Kreise teilen die Fläche in acht Teile, von denen immer je zwei mit einer Breitseite zusammenstossende auf verschiedenen

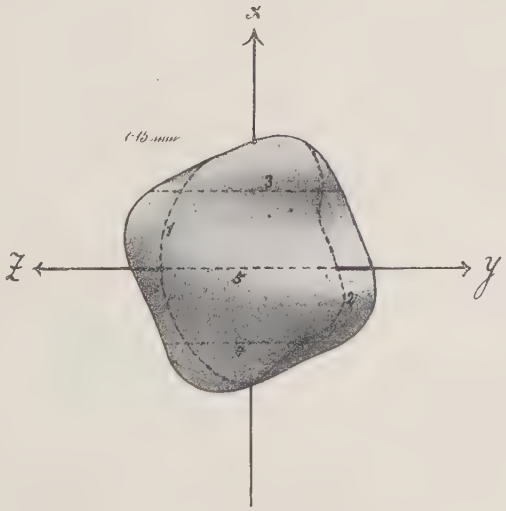

Fig. 11.

Seiten, je zwei mit einem Eck zusammenstossende aber auf derselben Seite der die Fläche sechsfach berührenden Kugelfläche liegen.

b) $a = 1{,}056$.

1) $\vartheta = 0$. $\cos\vartheta = 1$. $r = \sqrt[5]{1{,}056 + \varphi(\psi)}$.

Tabelle X gibt die Werte von r, Fig. 12 die Schnittkurve.

2) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (45°).

Siehe Tabelle XI und Fig. 13.

ψ	r
0	1,011
μ	1,161 (Ma.)
α	1,011
μ'	0,812 (Mi.)
$\pi/2$	1,011
$\pi-\mu'$	1,120 (Ma.)
$\pi-\alpha$	1,011
$\pi-\mu$	0 (Mi.)
π	1,011

Tab. X.

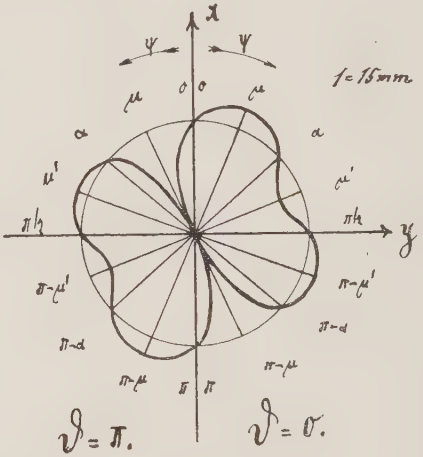

Fig. 12.

3) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (90°).

$\cos\vartheta = 0$. $r = 1{,}011$. Das ist ein Kreis.

4) $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ (135°).

Diese Kurve erhält man wieder, wenn man einfach Fig. 13 um 180° um die x-Axe dreht.

Fig. 14 gibt wieder eine Parallellprojektion der Fläche. Sie unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, dass die

Vertiefungen und Erhöhungen stärker hervortreten und dass in der Ebene $\vartheta = 0$ bei $\psi = \pi - \mu$ und in der Ebene $\vartheta = \pi$ bei $\psi = \mu$ in der Schnittkurve eine Spitze auftritt. Die Fläche zieht sich daher an diesen beiden Stellen trichterförmig zum Anfangspunkt hinein.

ψ	r
0	1,011
μ	1,125 (Ma.)
α	1,011
μ'	0,890 (Mi.)
$\pi/2$	1,011
$\pi - \mu'$	1,092 (Ma.)
$\pi - \alpha$	1,011
$\pi - \mu$	0,791 (Mi.)
π	1,011

Tab. XI.

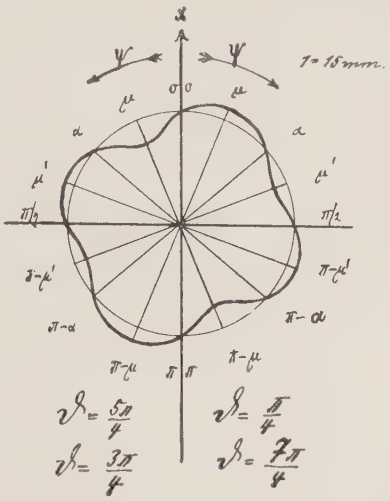

Fig. 13.

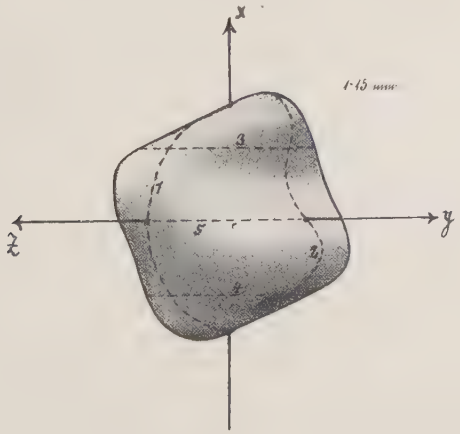

Fig. 14.

B. Die spezielle Legendresche Gleichung.

Gleichung B im Abschnitt I lautete:

$$r^5 = A + BX_4 + B' \frac{d^2X_4}{dx^2} \sin^2\psi \cos 2\vartheta + B'' \frac{d^4X_4}{dx^4} \sin^4\psi \cos 4\vartheta + CX_6 + C' \frac{d^2X_6}{dx^2} \sin^2\psi \cos 2\vartheta + C'' \frac{d^4X_6}{dx^4} \sin^4\psi \cos 4\vartheta + C''' \frac{d^6X_6}{dx^6} \sin^6\psi \cos 6\vartheta + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Die Flächen, welche diese Gleichung darstellt, unterscheiden sich von den unter A betrachteten Flächen durch eine weitgehende Symmetrie. Sie sind nämlich orthogonal symmetrisch in Bezug auf die drei Koordinatenebenen.

Wir können natürlich auch hier nur die einfachsten Formen in Betracht ziehen.

Zunächst bekommt man wieder die Kugel $r^5 = A$ und die schon behandelte Rotationsfläche $r^5 = A + BX_4$. Erst wenn man die ersten drei Koëffizienten von Null verschieden nimmt, erhält man eine neue Fläche, nämlich:

$$r^5 = A + BX_4 + B' \frac{d^2X_4}{dx^2} \sin^2\psi \cos 2\vartheta.$$

Wir spezialisieren hier auch wieder, indem wir $B = 0$ annehmen. Die Form der Fläche hängt dann wieder allein ab vom Verhältnis $A : B'$, und es kann daher ohne weitere Spezialisierung $B' = \frac{2}{15}$ gesetzt und A allein willkürlich gelassen werden. Die Gleichung lautet dann:

$$r^5 = A + (7 \cos^2\psi - 1) \cdot \sin^2\psi \cdot \cos 2\vartheta.$$

Wir setzen $(7 \cos^2\psi - 1) \cdot \sin^2\psi = \chi(\psi)$ und untersuchen diese Funktion. Man kann $\chi(\psi)$ in anderer Form schreiben, nämlich

$$\chi(\psi) = (6 - 7 \sin^2\psi) \sin^2\psi.$$

Die Ableitung $\frac{d\chi(\psi)}{d\psi} = 4 \sin\psi \cos\psi (3 - 7 \sin^2\psi)$ verschwindet

für $\sin\psi = 0$, $\cos\psi = 0$, $\sin\psi = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$, oder

$$\psi = 0, \pi, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \psi = \mu, \pi - \mu.$$

Dabei ist $\mu = 40^\circ 53\frac{1}{2}'$ ca.

ψ	$\chi(\psi)$
0	0
μ (41°)	$^9/_7$
α (68°)	0
$\pi/2$	-1
$\pi - \alpha$	0
$\pi - \mu$	$^9/_7$
π	0

Tab. XII.

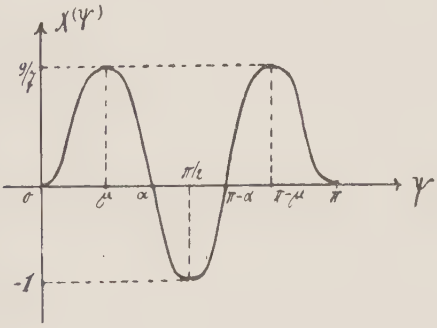

Fig. 15.

An diesen Stellen also ist $\chi(\psi)$ ein Extremum, und zwar, wie sich weiter ergibt, bei $\psi = \mu, \pi - \mu$ ein Maximum und bei $\psi = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ein Minimum.

Ferner verschwindet $\chi(\psi)$ für $\psi = 0, \pi$ und für $\sin\psi = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$ oder $\psi = \alpha, \pi - \alpha$, wenn $\alpha = 67^\circ 47\frac{1}{2}'$ ca.

Tabelle XII gibt die Werte von $\chi(\psi)$ und Fig. 15 die Funktionskurve

Die Gleichung der Fläche schreibt sich nun so:

$$r = \sqrt[5]{A + \chi(\psi) \cdot \cos 2\vartheta}.$$

Es liegen auf dieser Fläche wieder vier Kreise. Erstens sind die Schnittkurven mit den Ebenen $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ zwei Kreise vom Radius $\sqrt[5]{A}$. Zweitens hat in jeder durch die x-Axe laufenden Halbebene r den Wert $\sqrt[5]{A}$ für $\psi = \alpha, \pi - \alpha$. Daher schneidet der Kreiskegel mit der x-Axe als Axe und der Öffnung 2α die Fläche in zwei Kreisen. Diese Kreise liegen parallel zur Ebene y z und haben den Radius $\sqrt[5]{A} \cdot \sin \alpha$.

Die vier Kreise liegen gleichzeitig auf der mit der Fläche konzentrischen Kugel vom Radius $\sqrt[5]{A}$ und schneiden sich in zehn Punkten, von denen zwei in die Endpunkte der x-Axe fallen. In diesen zehn Punkten berühren sich Fläche und Kugel. Die zehnfach berührende Kugel hat auch wieder dasselbe Trägheitsmoment $\left(\rho \cdot \frac{8\pi}{15} A\right)$ wie der von der Fläche umschlossene homogene Körper, wenn auch sie aus homogener Masse von derselben Dichte besteht.

ψ	r
0	1,084
μ	1,227 (Ma.)
α	1,084
$\pi/2$	0,871 (Mi.)
$\pi - \alpha$	1,084
$\pi - \mu$	1,227 (Ma.)
π	1,084

Tab. XIII.

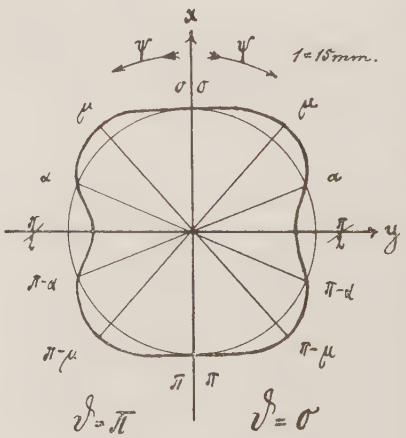

Fig. 16.

Die Form unserer Fläche ändert sich mit dem Werte von A. Damit r stets positiv oder stets negativ bleibt, muss $A > \frac{9}{7}$ oder $A \leq -\frac{9}{7}$ sein. Wir brauchen aber die Fläche wieder nur für positive Werte von A zu untersuchen, da für negative Werte dieselben Formen kommen, wie sich nachher zeigen wird.

Wir unterscheiden die zwei Fälle $A > \frac{9}{7}$ und $A = \frac{9}{7}$ und wählen für den ersten Fall A = 1,5. Die Fläche nähert sich auch wieder mit wachsendem A der Kugelgestalt, welche sie für $A = \infty$ erreicht.

ψ	r
0	1,084
μ	0,735 (Mi.)
α	1,084
$\pi/2$	1,201 (Ma.)
$\pi - \alpha$	1,084
$\pi - \mu$	0,735 (Mi.)
π	1,084

Tab. XIV.

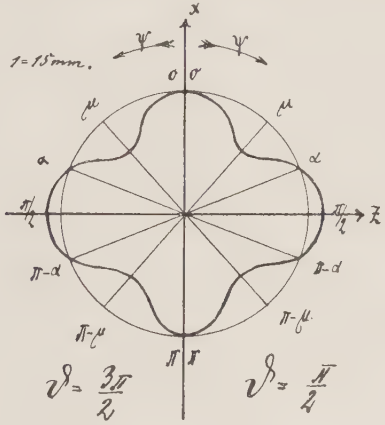

Fig. 17.

a) Gestalt der Fläche $r^5 = A + \chi(\psi) \cdot \cos 2\vartheta$ für A = 1,5.

1) Schnitt mit Ebene $\vartheta = 0, \pi$.

Hier ist $\cos 2\vartheta = 1$, also $r = \sqrt[5]{1{,}5 + \chi(\psi)}$ Tabelle XIII gibt die Werte von r, und Fig. 16 die Kurve. Es ist wieder die vollständige Schnittkurve gezeichnet, welche sich aus den Schnitten $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ zusammensetzt. An den Anschlussstellen hat man wieder eine einzige Tangente, welche senkrecht zum Radius steht. Denn der Radius hat an den Stellen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ extreme Werte Dasselbe gilt für die folgenden Schnittkurven. Eingezeichnet ist in Fig. 16 und den folgenden Figuren auch der Schnittkreis mit der zehnfach berührenden Kugel vom Radius $\sqrt[5]{A}$.

2) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Da $\cos 2\vartheta = 0$ wird, so ist $r = \sqrt[5]{1{,}5} = 1{,}084$. Der Schnitt ist ein Kreis.

3) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

$\cos 2\vartheta = -1$. $r = \sqrt[5]{1{,}5 - \chi(\psi)}$. Siehe Tabelle XIV und Fig. 17.

ϑ	r
0	0,871 (Mi.)
$\pi/4$	1,084
$\pi/2$	1,201 (Ma.)
$3\pi/4$	1,084
π	0,871 (Mi.)

Tab. XV.

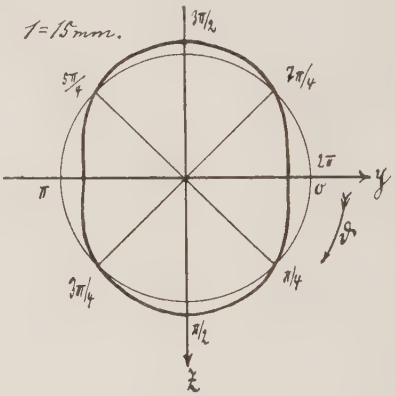

Fig. 18.

4) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Hier ist wieder $\cos 2\vartheta = 0$, also der Schnitt ein Kreis mit dem Radius 1,084.

5) Schnitt mit Ebene y z $\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Siehe Tabelle XV und Fig. 18. Bei der vorher betrachteten Fläche $r^5 = a + (7 \cos^2\psi - 3) \cos\psi \sin\psi \cos\vartheta$ war dieser Schnitt ein Kreis.

Fig. 19 gibt eine Parallelprojektion der Fläche. Die Projektionsstrahlen sind parallel der Linie $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \psi = \frac{\pi}{2}$. Das Licht fällt von oben. 1 ist der Schnitt mit Ebene x z, 2 der

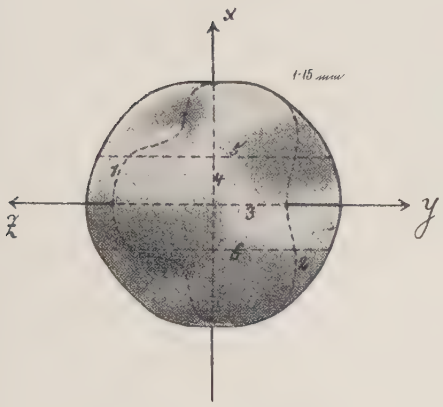

Fig. 19.

Schnitt mit Ebene x y, 3 der Schnitt mit Ebene y z 4, 5 und 6 sind drei auf der Fläche liegende Kreise. Der vierte fällt zum Teil mit der Kontur zusammen.

Wenn man A durch — A ersetzen würde, so träten dieselben Schnittkurven auf. Nur wären die Schnittkurven für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$ vertauscht, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die Fläche wäre dann ohne Änderung ihrer Form einfach um die x-Axe um 90° gedreht worden. Für negative Werte von A bekommt man also in der That dieselben Flächen, wie für positive.

b) Gestalt der Fläche $r^5 = A + \chi(\psi) \cdot \cos 2\vartheta$ für $A = \frac{9}{7}$.

1) Schnitt mit Ebene $\vartheta = 0, \pi$; $r^5 = \frac{9}{7} + \chi(\psi)$.
S. Tab. XVI und Fig. 20.

ψ	r
0	1,052
μ	1,208 (Ma.)
α	1,052
$\pi/2$	0,778 (Mi.)
$\pi - \alpha$	1,052
$\pi - \mu$	1,208 (Ma.)
π	1,052

Tab. XVI

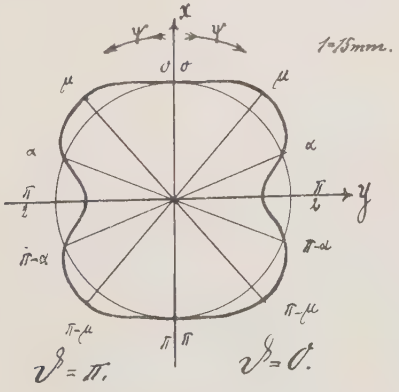

Fig. 20.

2) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; $r = \sqrt[5]{\frac{9}{7}} = 1{,}052$.

Das ist ein Kreis.

ψ	r
0	1,052
μ	0 (Mi.)
α	1,052
$\pi/2$	1,180 (Ma.)
$\pi - \alpha$	1,052
$\pi - \mu$	0 (Mi.)
π	1,052

Tab. XVII.

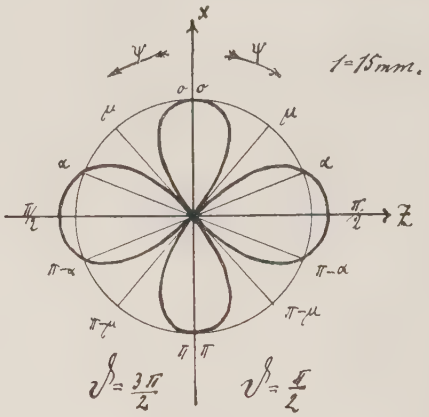

Fig. 21.

3) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; $r^5 = \frac{9}{7} - \chi(\psi)$.

S. Tab. XVII und Fig. 21.

4) Schnitt mit Ebene $\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; $r = 1{,}052$.

Das ist wieder ein Kreis.

5) Schnitt mit Ebene y z oder $\psi = 90^0$.

S. Tab. XVIII und Fig. 22.

ϑ	r
0	0,778 (Mi.)
$\pi/4$	1,052
$\pi/2$	1,180 (Ma.)
$3\pi/4$	1,052
π	0,778 (Mi.)

Tab. XVIII.

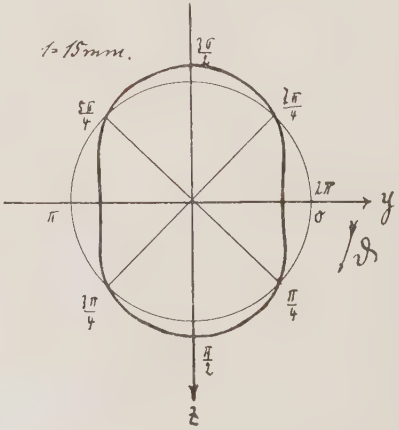

Fig. 22.

Fig. 23 gibt wieder eine Parallelprojektion der Fläche analog der Fig. 19. Die Vertiefungen treten hier stärker auf und bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \psi = \mu, \pi - \mu$ zieht sich die Fläche trichterförmig bis zum Anfangspunkt hinein.

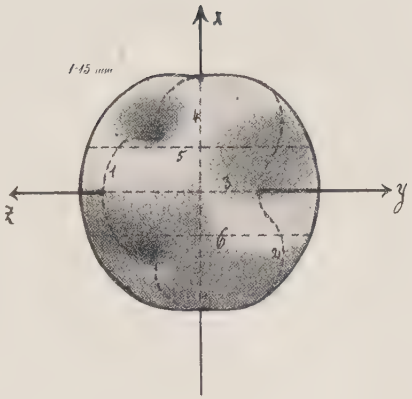

Fig. 23.

Wir beschliessen hiemit die Betrachtung der Legendreschen Flächen. Nur die eine Bemerkung sei noch gestattet, dass unter den unendlich vielen in der Legendreschen Gleichung enthaltenen Flächen noch eine ganze Reihe von Rotationsflächen sich findet. Wenn man nämlich alle das ϑ enthaltenden Glieder weglässt, so bleibt noch die Gleichung

$$r^5 = A + BX_4 + CX_6 + DX_8 + \ldots \ldots ,$$

welche ausschliesslich Rotationsflächen liefert.

III.

Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine Axe.

Die bisher von uns betrachteten Körper hatten die Eigenschaft kinetischer Symmetrie in Bezug auf den Schwerpunkt, d. h. sie besassen gleiche Trägheitsmomente für alle durch den Schwerpunkt laufenden Axen. Man spricht nun aber auch von Körpern mit kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine Axe, und versteht darunter solche Körper, bei welchen eine

bestimmte Axe in der Weise ausgezeichnet ist, dass für alle Axen, welche durch einen Punkt der ausgezeichneten Axe laufen und zu ihr senkrecht stehen, die Trägheitsmomente gleich gross sind. Das Trägheitsellipsoid eines solchen Körpers ist dann ein Rotationsellipsoid mit der ausgezeichneten Axe als Rotationsaxe. Einfache Beispiele solcher Körper sind gerade Prismen und Pyramiden mit regulärem Viereck, Achteck, Zwölfeck u. s. f. als Basis, Kreiskegel, Kreiscylinder und überhaupt alle Rotationsflächen.

Bei einem Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine Axe kann es vorkommen, dass für irgend einen Punkt der ausgezeichneten Axe das Trägheitsmoment der zu ihr senkrechten Axen gleich ihrem eigenen Trägheitsmoment wird. Läuft die Axe durch den Schwerpunkt, so kann dieser Fall für den Schwerpunkt selbst eintreten, und dann wird der Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf den Schwerpunkt. Die kinetische Symmetrie, von welcher im Vorangehenden die Rede war, ist also nur ein spezieller Fall der kinetischen Symmetrie in Bezug auf eine Axe. Jeder Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf den Schwerpunkt kann daher auch als Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf irgend eine durch den Schwerpunkt laufende Axe angesehen werden.

Bei dieser nahen Beziehung von Körpern von kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt laufende Axe zu Körpern von kinetischer Symmetrie in Bezug auf den Schwerpunkt muss es möglich sein, Körper der ersten Art durch Abstutzen in Körper der zweiten Art umzuwandeln. Es handelt sich ja nur darum, das Trägheitsmoment der ausgezeichneten Axe dem Trägheitsmoment der zu ihr senkrechten Axen gleich zu machen. Dieses Problem möge für Rotationskörper durchgeführt werden.

Jeder Rotationskörper ist, wie schon erwähnt, ein Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf die Rotationsaxe. Diese läuft stets durch den Schwerpunkt.

Wenn der Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf den Schwerpunkt werden soll, so müssen die Trägheitsmomente für die drei Hauptträgheitsaxen gleich werden. Die drei Hauptträgheitsaxen eines Rotationskörpers sind die Rotationsaxe und zwei durch den Schwerpunkt laufende, zur Rotationsaxe und zu sich selbst senkrecht stehende, sonst noch beliebige Axen. Für die beiden letzteren sind die Trägheitsmomente schon gleich gross.

Wir wählen die Hauptträgheitsaxen zu Koordinatenaxen, und zwar die Rotationsaxe als z-Axe. r sei der senkrechte Abstand von ihr, gemessen in irgend einer Richtung. $r = \varphi(z)$ sei die Gleichung der Meridiankurve, welche nur auf einer Seite der Rotationsaxe gegeben zu sein braucht, ϑ der Winkel der Meridianebene gegen eine feste Ebene.

Die Meridiankurve muss so beschaffen sein, dass der Anfangspunkt auch wirklich der Schwerpunkt des Körpers wird. Um das einfach zu erreichen, setzen wir voraus, dass die Meridiankurve in Bezug auf die zur z-Axe senkrechte r-Axe orthogonale Symmetrie besitzt, dass also $\varphi(z)$ eine gerade Funktion von z ist.

Wenn nun unser Rotationskörper so abgestutzt werden soll, dass das Trägheitsmoment der Rotationsaxe dem der beiden anderen Hauptträgheitsaxen gleich wird, so darf durch dieses Abstutzen die schon vorhandene Symmetrie des Rotationskörpers nicht gestört werden. Das Abstutzen muss also geschehen durch eine Rotationsfläche mit derselben Rotationsaxe. Damit ferner der Schwerpunkt im Anfangspunkt liegen bleibt, muss die abstutzende Fläche auch orthogonale Symmetrie in Bezug auf die xy-Ebene haben. Als die einfachsten Flächen, welche diesen Bedingungen genügen, kommen in Betracht: 1) Zwei zur Rotationsaxe senkrechte, vom Anfangspunkt gleich weit entfernte Ebenen, und 2) eine Rotationscylinderfläche.

Wir wollen beide Fälle durchführen

a) Abstutzen durch zwei Ebenen.

Die beiden Ebenen sollen vom Anfangspunkt den Abstand d haben. Das Trägheitsmoment des abgestutzten Körpers in Bezug auf die Rotationsaxe wird dann

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^2 \cdot dr \cdot dz \cdot r\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3\, dr\, dz\, d\vartheta.$$

Für die x-Axe wird das Trägheitsmoment, wenn man den Winkel ϑ von der Ebene xz weg misst, folgendes:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} (z^2 + r^2 \sin^2\vartheta) \cdot dr \cdot dz \cdot d\vartheta\, r$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} z^2\, r\, dr\, dz\, d\vartheta + \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3 \sin^2\vartheta\, dr\, dz\, d\vartheta.$$

Siehe Fig. 24.

Dieses Trägheitsmoment für die x-Axe, welches dem für die y-Axe gleich ist, muss nun dem Trägheitsmoment der z-Axe gleich werden. Also:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3\, dr\, dz\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} z^2\, r\, dr\, dz\, d\vartheta$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3 \sin^2\vartheta\, dr\, dz\, d\vartheta, \text{ oder}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} z^2\, r\, dr\, dz\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3 \cos^2\vartheta\, dr\, dz\, d\vartheta.$$

Führt man die Integration über r und ϑ aus, so kommt:

$$2\pi \int_{-d}^{+d} \frac{[\varphi(z)]^2}{2} z^2 \, dz = \pi \int_{-d}^{+d} \frac{[\varphi(z)]^4}{4} dz.$$

$$4 \int_{-d}^{+d} [\varphi(z)]^2 \cdot z^2 \, dz = \int_{-d}^{+d} [\varphi(z)]^4 \, dz.$$

Mit Rücksicht darauf, dass nach Voraussetzung $\varphi(z)$ eine gerade Funktion von z ist, kann man schliesslich schreiben:

$$4 \int_{0}^{d} [\varphi(z)]^2 \cdot z^2 \, dz = \int_{0}^{d} [\varphi(z)]^4 \, dz.$$

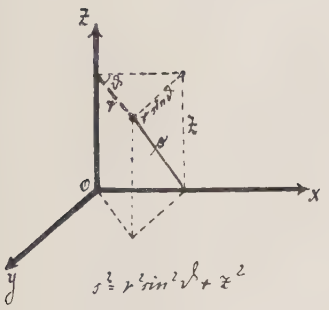

Fig. 24.

Diese Gleichung enthält die Bedingung dafür, dass der abgestutzte Körper kinetische Symmetrie besitzt.

Wir wollen nur einige einfache Beispiele hiezu behandeln.

1) Rotationsellipsoid.

Die Gleichung eines Rotationsellipsoides mit der z-Axe als Rotationsaxe ist $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Es ist $r^2 = x^2 + y^2$. Also $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. $r = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2}$. Man hat daher hier $\varphi(z) = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2}$. Die obige Gleichung wird dann folgende:

$$4 \int_{0}^{d} \frac{a^2}{b^2} (b^2 - z^2) z^2 \, dz = \int_{0}^{d} \frac{a^4}{b^4} (b^2 - z^2)^2 \, dz.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{5}(a^4 + 4a^2b^2)d^5 - \frac{2}{3}(a^4b^2 + 2a^2b^4)d^3 + a^4b^4d = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$d = 0 \text{ und } d^2 = \frac{5}{3}\frac{b^2(a^2 + 2b^2)}{(a^2 + 4b^2)}$$
$$+ \frac{b^2}{3(a^2 + 4b^2)} \cdot \sqrt{25(a^2 + 2b^2)^2 - 45a^2(a^2 + 4b^2)}.$$

Die Wurzel $d = 0$ liefert eine unendlich dünne Kreisscheibe. Diese hat für jede Axe das Trägheitsmoment Null und also auch lauter gleiche Trägheitsmomente. Die anderen Wurzeln sind nun nur dann reell, wenn $b \geqq a$. Denn der Ausdruck unter der Wurzel ist in seiner einfachsten Form $100b^4 - 80b^2a^2 - 20a^4$. Der einzige reelle Wert von b, für welchen diese Grösse verschwindet, ist $b = a$. (Es sei bemerkt, dass a und b als Halbaxen des Ellipsoides als stets positive Grössen anzunehmen sind.) Da also der Radikand nur für $b = a$ verschwindet, so folgt weiter, dass er für $b > a$ stets positiv, für $b < a$ stets negativ ist. Für $b < a$ bekommt man also imaginäre Werte von d. Man hat in diesem Fall ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Aus diesem kann man also durch Abstutzen in der hier angenommenen Weise keinen Körper von kinetischer Symmetrie gewinnen.

Für $b = a$, in welchem Falle das Ellipsoid in eine Kugel übergegangen ist, kommt $d^2 = a^2$. Die zwei Werte von d^2 sind zusammengefallen. Die Kugel müsste gerade an den Polen, d. h. überhaupt nicht abgestutzt werden.

Für $b > a$ nun erhält man zwei Werte für d^2. Einer davon ist aber immer grösser als b^2 und also unbrauchbar, da die Schnittebene in diesem Fall ganz ausserhalb des Ellipsoides liegen würde. Das gestreckte Rotationsellipsoid (denn ein solches hat man für $b > a$) kann also nur auf eine Weise durch Ebenen senkrecht zur Rotationsaxe so abgestutzt werden, dass der Rest ein Körper von kinetischer Symmetrie ist. Der

Beweis dafür, dass ein Wert von d^2 grösser als b^2 ist, ist leicht erbracht. Wenn nämlich

$$\frac{3}{5} b^2 \frac{a^2+2b^2}{a^2+4b^2} + b^2 \frac{1}{3(a^2+4b^2)} \sqrt{25(a^2+2b^2)^2 - 45a^2(a^2+4b^2)} > b^2$$

sein soll, so muss, wie durch einfache Umformung folgt,

$$4b^4 - 3b^2a^2 - a^4 > 0$$

sein. Nun verschwindet aber $4b^4 - 3b^2a^2 - a^4$ auch nur für $b^2 = a^2$, und ist infolge dessen stets positiv, wenn $b > a$ und stets negativ, wenn $b < a$. Hier ist $b > a$ Voraussetzung, also ist $4b^4 - 3b^2a^2 - a^4 > 0$ und somit ein Wert von d^2 grösser als b^2. Der andere Wert liegt dann zwischen 0 und b^2 und bestimmt somit ein reelles d zwischen 0 und b.

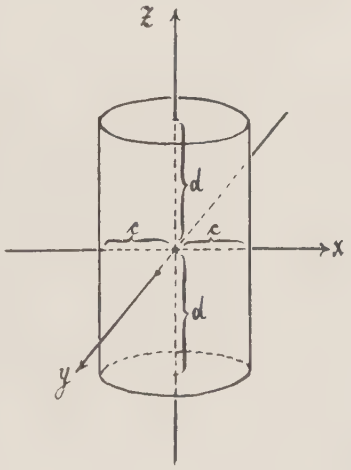

Fig. 25.

2) Kreiszylinder.

Es ist hier $r = \pm c$ (Fig. 25) und also $\varphi(z) = \pm c$.

Somit hat man die Bedingungsgleichung

$$4 \int_0^d c^2 z^2 \, dz = \int_0^d c^4 \, dz,$$

oder

$$\frac{4}{3} d^3 = c^2 d. \qquad d = + \frac{c}{2} \sqrt{3}.$$

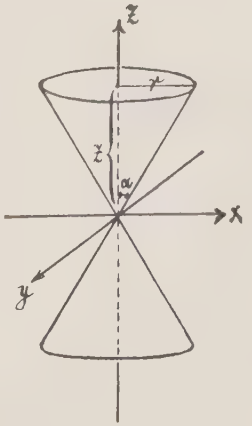

Fig. 26.

3) Kreiskegel.

Ist 2α die Öffnung des Kegels, so wird $r = \varphi(z) = \pm z \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (Fig. 26).

Also kommt

$$4 \int_0^d z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot z^2 \, dz = \int_0^d z^4 \operatorname{tg}^4 \alpha \, dz.$$

$4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{d^5}{5} = \operatorname{tg}^4 \alpha \cdot \frac{d^5}{5}$. Aus dieser Gleichung fällt d hinaus.

Die Gleichung kann nur bestehen, wenn $4 \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^4 \alpha$, oder $\operatorname{tg} \alpha = \pm 2$ ist, und besteht dann für jedes d. Man kann also durch zwei zur Rotatationsaxe senkrechte Ebenen nur einen Kegel von ganz bestimmter Öffnung so abstutzen, dass man einen Körper von kinetischer Symmetrie erhält. Die halbe Öffnung dieses Kegels ist $\alpha = 63^\circ 26' 6''$. Bei diesem Kegel ist es aber dann gleichgiltig, wo man ihn abschneidet. Das zwischen irgend zwei zur Rotationsaxe senkrechten und vom Mittelpunkt gleichweit abstehenden Ebenen liegende Stück ist, wenn von homogener Masse erfüllt, immer von kinetischer Symmetrie.

b) Abstutzen durch einen Kreiscylinder.

Wir nehmen hier die Gleichung der Meridiankurve nicht in der Form $r = \varphi(z)$, sondern in der Form $z = \chi(r)$ gegeben an. Und zwar soll $z = \chi(r)$ nur den oberhalb der r-Axe gelegenen Teil der Kurve darstellen. Dann stellt $z = -\chi(r)$ den unterhalb der r-Axe liegenden Teil dar, da unsere Meridiankurve orthogonal symmetrisch zur r-Axe vorausgesetzt wurde. Das Trägheitsmoment für die x-Axe wird nun (analog wie unter a):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^c \int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} z^2 r \, dz \, dr \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} r^3 \sin^2 \vartheta \, dz \, dr \, d\vartheta,$$

und das für die z-Axe: $\int_0^{2\pi} \int_0^c \int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} r^3 \, dz \, dr \, d\vartheta$, wenn c den Radius des schneidenden Cylinders bedeutet.

Durch Gleichsetzen beider erhält man wieder

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} z^2\, r\, dz\, dr\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} r^3 \cos^2\vartheta\, dz\, dr\, d\vartheta.$$

Führt man die Integration über z und ϑ aus, so kommt:

$$2\pi \int_0^{c} \frac{2\,[\chi(r)]^3}{3}\, r\, dr = \pi \int_0^{c} 2\,\chi(r)\cdot r^3\, dr.$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{c} [\chi(r)]^3 \cdot r\, dr = \int_0^{c} \chi(r)\cdot r^3\, dr.$$

Dies ist wieder die Bedingung dafür, dass der abgestutzte Körper von kinetischer Symmetrie ist.

Durch Abstutzen mit einem Cylinder müsste man auch aus einem abgeplatteten Rotationsellipsoid einen Körper von kinetischer Symmetrie gewinnen können. Die Anwendung der eben abgeleiteten Formel auf das Rotationsellipsoid führt aber zur Bestimmung von c auf eine Gleichung fünften Grades, so dass eine allgemeine Lösung nicht angegeben werden kann.

Wir wollen die gefundene Formel noch auf zwei Fälle anwenden.

1) Der durch zwei parallele, zur x-Axe senkrechte, im gleichen Abstand d vom Anfangspunkt liegende Ebenen begrenzte unendliche Raum soll durch den Cylinder so abgeschnitten werden, dass ein Körper von kinetischer Symmetrie entsteht, wenn der Raum von homogener Masse erfüllt ist.

Der entstandene Körper ist natürlich ein senkrecht abgeschnittener Cylinder.

Man hat $\chi(r) = d$. Also

$$\frac{2}{3}\int_0^{c} d^3\, r\, dr = \int_0^{c} d\, r^3\, dr.$$

$$\frac{2}{3}\, d^3 \cdot \frac{c^2}{2} = d\cdot\frac{c^4}{4}. \qquad c = \frac{2}{3}\, d\sqrt{3}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem bei Beispiel 2 unter a gefundenen überein.

2) Der von einer Kreiskegelfläche begrenzte, nach aussen sich erstreckende, d. h. ausserhalb des Kegelkörpers gelegene Raum soll ebenso abgestutzt werden.

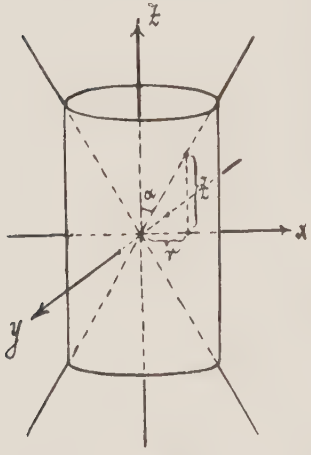

Fig. 27.

Man hat $z = r \operatorname{ctg} \alpha$. Also $\chi(r) = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

$$\frac{2}{3}\int_0^c r^4 \operatorname{ctg}^3 \alpha \, dr = \int_0^c r^4 \operatorname{ctg} \alpha \, dr.$$

$$\frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \frac{c^5}{5} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{c^5}{5}.$$

c fällt aus der Gleichung hinaus. Die Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ist. Man kann also nur aus dem einen Kreiskegel von ganz bestimmter Oeffnung umgebenden Raum durch einen Kreiscylinder ein Stück von kinetischer Symmetrie herausschneiden. Die halbe Öffnung muss die Grösse $\alpha = 39^0\,13'\,55''$ haben. Der Radius des schneidenden Cylinders bleibt willkürlich. Das erhaltene Stück hat die Form eines Kreiscylinders, aus welchem die beiden von den Grenzkreisen der ebenen Endflächen zum Mittelpunkt sich hineinziehenden Kreiskegel herausgebohrt wurden. Der so erhaltene Körper besitzt also, wenn aus homogener Masse bestehend, kinetische Symmetrie dann, wenn die halbe Öffnung der herausgeschnittenen Kegel gerade $\alpha = 39^0\,13'\,55''$ ist, oder wenn die Länge des Cylinders sich zu seinem Durchmesser verhält wie $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. –

Anhang.

Physikalische Untersuchung eines Modells des von der Fläche $r^5 = 1{,}5 + (6-7 \sin^2\psi) \sin^2\psi \cos 2\vartheta$ umhüllten Körpers.

(S. Fig. 19.)

Von der Ansicht ausgehend, dass es einiges Interesse bieten dürfte, die Resultate der vorangegangenen, auf einem mechanischen Problem fussenden Untersuchungen nun auch praktisch zu prüfen, hat der Verfasser von der in der Fig. 19 dargestellten Fläche ein Gipsmodell angefertigt und dasselbe auf die verlangten Eigenschaften physikalisch untersucht. Es ergab sich dabei, was ja auch zu erwarten war, dass bei der immerhin rohen Art und Weise der Herstellung des Modells die Fehler desselben merkbare Abweichungen von der theoretischen Gleichheit der Trägheitsmomente verursachten. Trotz dieses Mangels möge ein kurzer Bericht über die angestellten Messungen hier Platz finden.

Zunächst handelte es sich um die Herstellung des Modells. Dieses durfte einerseits nicht zu gross sein, um den Inhomogenitäten des Materials nicht allzu starken Einfluss zu gewähren, andererseits nicht zu klein, um die unvermeidlichen Formfehler gegenüber den Dimensionen des ganzen Modells nicht zu gross werden zu lassen. Deshalb wurden, um eine mittlere Grösse zu erhalten, 5 cm als Längeneinheit gewählt.

Die Herstellung des Modells geschah in folgender Weise: Es wurden die Schnittkurven mit den durch die x-Axe gelegten Ebenen für Werte von ϑ, welche von zehn zu zehn Grad fortschritten, berechnet, aus Karton ausgeschnitten, und zusammengesetzt. Das so erhaltene Gerüst wurde mit Cement

ausgefüllt und dann wurde von diesem Originalmodell ein Negativ in Gips abgegossen, welches aus vier zu einer Hohlform zusammensetzbaren Teilen bestand. Diese Form wurde dann so gelegt, dass die y-Axe vertikal stand. An den beiden zu höchst liegenden Punkten wurden nun Löcher gebohrt, eins zum Eingiessen des Gipses, das andere zum Entweichen der Luft. Mit Rücksicht auf die beim Erhärten eintretende Kontraktion der Gipsmasse wurden auf die beiden Öffnungen ca. 15 cm hohe Cylinder aufgesetzt und dann in den einen so lange eingegossen, bis auch der zweite sich gefüllt hatte. Infolge des beständigen Nachdringens des Gipsbreies wurde dann trotz der erwähnten Kontraktion ein massiver Abguss erhalten.

Die Messung der Trägheitsmomente am fertigen Modell geschah durch Aufhängung desselben an einem 153 cm langen und 0,25 mm dicken Stahldrahte und Beobachtung der nun entstehenden Torsionsschwingungen. Die Aufhängung geschah in der Weise, dass ein dünner Bindfaden, dessen Gewicht zu vernachlässigen war, straff um den Körper gelegt und dann in ein am unteren Ende des Drahtes befestigtes Häkchen eingehängt wurde. Die in der Verlängerung des Drahtes liegende Axe des Körpers war dann immer die Schwingungsaxe und ging von selbst durch den Schwerpunkt. An das genannte Häkchen war ferner ein Spiegel angekittet, um die Schwingungen mit Fernrohr und Skala beobachten zu können.

Um den sehr merkbaren Einfluss von Luftströmungen zu beseitigen, wurde der schwingende Körper in ein Gehäuse gebracht, welches nur oben eine Öffnung für den Draht und vorne ein Glasfenster zur Beobachtung des Spiegels hatte.

Mit Hilfe eines halbe Sekunden schlagenden Chronometers geschah sodann die Bestimmung der Schwingungszeiten für die verschiedenen Axen nach der von Kohlrausch in seinem Leitfaden der praktischen Physik angegebenen Methode.

Der Angabe der Resultate der Beobachtungen seien einige Bemerkungen über deren Genauigkeit vorausgeschickt.

Als Fehlerquellen konnten auftreten:

1) Luftwiderstand;
2) Temperaturschwankungen;
3) Elastische Nachwirkungen und Änderungen im Drahte.

Es ergab sich nun, dass der Luftwiderstand keinen merkbaren Einfluss hatte. Denn es liess sich keine Vergrösserung der Schwingungsdauer bei vergrösserter Amplitude nachweisen. Die Temperatur war in dem Kellerraume der technischen Hochschule zu München, in welchem die Messungen ausgeführt wurden, nahezu konstant (13° C.), und ihre geringen Schwankungen zeigten sich ohne Einfluss. Ziemlich gross dagegen waren die störenden Einwirkungen der Veränderungen innerhalb des Drahtes. Zunächst zeigte sich, dass der Draht nach dem Umhängen eines Körpers immer unzuverlässig war. Es wurde daher die Vorsicht gebraucht, nach dem Umhängen immer fünf Minuten mit der Beobachtung zu warten. Trotzdem ergaben sich bei den verschiedenen Beobachtungen noch Differenzen in der Schwingungsdauer bis zu 0,04″. Bis auf diese Grösse sind also die Resultate genau.

Die angestellten Beobachtungen erstrecken sich über fünf verschiedene Abgüsse des Modells (I—V) und ausserdem über zwei auch aus Gips gegossene Würfel von 9 cm Kantenlänge. Die Würfel, welche ja auch Körper von kinetischer Symmetrie sind, wurden untersucht, um ein Vergleichsobjekt zu besitzen. Bei jedem Modell wurde die Schwingungsdauer bestimmt für die Axen x, y, z. Bei den Würfeln sind als diese Axen die durch den Mittelpunkt laufenden und zu den Seitenflächen senkrechten drei Linien angenommen. Tabelle XIX gibt die als Mittel aus allen Beobachtungen gewonnenen Zahlen. Zugleich sind die Gewichte der Körper angegeben, deren Verschiedenheit sich aus verschiedener Dichte des Gipsbreies erklärt. Ferner gibt die Rubrik Δ bei jedem Körper die Abweichungen der Schwingungszeiten für die Axen y und z von der Schwingungsdauer für die Axe x. Man sieht, dass bei den Legendreschen Körpern

die Axen x und y sich wenig unterscheiden, dass aber die z-Axe überall eine bedeutend grössere Schwingungszeit aufweist. Bei den Würfeln sind die auftretenden Verschieden-

Modell	Gewicht	Axe	Dauer einer Voll-Schwingung	Δ
I	830 g	x	43,80"	—
		y	43,94"	0,14"
		z	44,17"	0,37"
II	838 g	x	44,04"	—
		y	44,13"	0,09"
		z	44,41"	0,37"
III	815 g	x	43,48"	—
		y	43,58"	0,10"
		z	43,79"	0,31"
IV	761 g	x	41,80"	—
		y	41,98"	0,18"
		z	42,22"	0,42"
V	850 g	x	44,56"	—
		y	44,57"	0,01"
		z	44,94"	0,38"
Würfel I	805 g	x	44,63"	—
		y	44,58"	—0,05"
		z	44,42"	—0,21"
Würfel II	836 g	x	45,32"	—
		y	45,39"	0,07"
		z	45,22"	– 0,10"

Tab. XIX.

heiten etwa halb so gross, wie bei den anderen Körpern. Das erklärt sich daraus, dass erstens bei der einfachen Form der Würfel Formfehler leichter zu vermeiden waren und dass zweitens beim Guss der Würfel jedenfalls eine gleichmässigere Verteilung des Gipsbreies stattfand, da hier eine ganze Seiten-

fläche zum Einguss frei lag, während bei den anderen Modellen durch eine einzige Öffnung eingegossen wurde.

Es fragt sich nun, wie gross die den angegebenen Abweichungen in der Schwingungszeit entsprechenden Abweichungen im Trägheitsmoment sind. Aus der Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

in welcher T die Schwingungszeit für eine Vollschwingung, K das Trägheitsmoment für die Schwingungsaxe und D die sogen. Direktionskraft bedeutet, folgt, da D nur vom Drahte abhängig und also konstant anzunehmen ist, dass $K : K_1 = T^2 : T_1^2$ für zwei verschiedene Axen. Bei Modell I ist die für die x-Axe $T = 43{,}80''$, für die z-Axe $T_1 = 44{,}17''$. Also $K_1 = K \cdot \left(\frac{44{,}17}{43{,}80}\right)^2 = K \cdot 1{,}017$. Das Trägheitsmoment wächst also von der x-Axe zur z-Axe um 1,7 %. Wir wollen diese Änderung in absolutem Maasse ausdrücken. Das Trägheitsmoment unseres Körpers ist $\rho \frac{8\pi}{15} A$. ρ ist die spez. Dichte, welche im cm-g-sec-System identisch ist mit dem spez. Gewicht. Um nun $\frac{8\pi}{15} A$ zu berechnen, müssen wir A in cm ausdrücken. Es wurde für den Radius als Längeneinheit die Strecke von 5 cm gewählt. Nun ist $r = \sqrt[5]{a + \chi(\psi) \cdot \cos 2\vartheta}$. Wenn also r mit 5 multipliziert wird, so muss unter der Wurzel mit $5^5 = 3125$ multipliziert werden. Also ist für unsere Fläche $A = 1{,}5 \cdot 3125$ cm, oder $A = 4687{,}5$ cm. Dann wird das Trägheitsmoment $\rho \cdot \frac{8\pi}{15} A$ gleich $\rho \cdot 7854$ gcm². Zur Bestimmung von ρ wurde nun aus demselben Gipsbrei, aus welchem Modell I gegossen wurde, ein kleiner Würfel gegossen, aus dessen Gewicht und Volumen sich $\rho = 1{,}1$ berechnete. Für die zwei grossen Würfel war $\rho = 1{,}104$ bezw. $\rho = 1{,}147$. Sicher ist also $\rho < 1{,}2$. Nimmt man, um eine obere Grenze für den Unterschied in den

Trägheitsmomenten zu bekommen, $\rho = 1{,}2$ an, so wird das Trägheitsmoment rund 9500 gcm². 1,7 % davon ist rund 160 gcm². Grösser ist also die Abweichung im Trägheitsmoment unseres Körpers keinesfalls.

Erklären kann man diese Abweichung durch Inhomogenität und Formfehler leicht. Es würde zum Beispiel allein ein längs der Schnittkurve mit der x y-Ebene dem Körper aufgelagerter Wulst von nur 0,7 mm Dicke und 20 mm Breite die Abweichung erzeugen können. Solch ein Formfehler liegt aber durchaus im Bereich der Möglichkeit.

Es zeigt sich also, dass zwischen Theorie und Praxis kein Widerspruch entsteht und mit diesem Resultat muss man sich aus den schon angeführten Gründen zufrieden geben.

Regensburg, im Mai 1899.